§ 103. Гравитационный коллапс пылевидной сферы

Выяснение хода изменения внутреннего состояния коллапсирующего тела (в том числе в течение процесса его сжатия под шварцшильдовой сферой) требует решения уравнений Эйнштейна для гравитационного поля в материальной среде. В центрально-симметричном случае уравнения поля могут быть решены в общем виде в пренебрежении давлением вещества, т. е. для уравнения состояния «пылевидной» материи: $p=0$ (*R. Tolman*, 1934). Хотя такое пренебрежение в реальных ситуациях обычно недопустимо, общее решение этой задачи представляет заметный методический интерес.

Как было указано в § 97, пылевидная среда допускает выбор системы отсчета, являющейся одновременно синхронной и сопутствующей [1]). Обозначив выбранные именно таким образом время и радиальную координату посредством τ и R, напишем сферически-симметричный элемент интервала в виде [2])

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\lambda(\tau, R)}dR^2 - r^2(\tau, R)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \qquad (103,1)$$

Функция $r(\tau, R)$ представляет собой «радиус», определенный так, что $2\pi r$ есть длина окружности (с центром в начале координат). Форма (103,1) фиксирует выбор τ однозначным образом, но допускает еще произвольные преобразования радиальной координаты вида $R = R(R')$.

Вычисление компонент тензора Риччи для этой метрики приводит к следующей системе уравнений Эйнштейна [3]):

$$-e^{-\lambda}r'^2 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2 + 1 = 0, \qquad (103,2)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r}(2r'' - r'\lambda') + \frac{\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} + \frac{2\ddot{r}}{r} = 0, \qquad (103,3)$$

$$-\frac{e^{-\lambda}}{r^2}(2rr'' + r'^2 - rr'\lambda') + \frac{1}{r^2}(r\dot{r}\dot{\lambda} + \dot{r}^2 + 1) = 8\pi k\varepsilon, \qquad (103,4)$$

$$2\dot{r}' - \dot{\lambda}r' = 0, \qquad (103,5)$$

где штрих означает дифференцирование по R, а точка — по τ.

---

[1]) При этом требуется, чтобы материя двигалась «без вращения» (см. примечание на стр. 372). Это условие в данном случае заведомо выполняется, поскольку сферическая симметрия подразумевает чисто радиальное движение вещества.

[2]) В этом параграфе полагаем $c = 1$.

[3]) Ср. задачу 5 § 100. Уравнения (103,2—5) получаются соответственно из уравнений (2)—(5) этой задачи, если положить в них $\nu = 0$, $e^{\mu} = r^2$, $p = 0$. Заметим, что второе из уравнений (6) этой же задачи при $p = 0$ дает $\nu' = 0$, т. е. $\nu = \nu(\tau)$; оставшийся в метрике (1) произвол в выборе τ позволяет поэтому обратить ν в нуль, чем снова демонстрируется возможность введения синхронно-сопутствующей системы отсчета.

Уравнение (103,5) непосредственно интегрируется по времени, давая

$$e^{\lambda}=\frac{r'^2}{1+f(R)}, \tag{103,6}$$

где $f(R)$ — произвольная функция, удовлетворяющая лишь условию $1+f>0$. Подставив это выражение в (103,2), получим

$$2r\ddot{r}+\dot{r}^2-f=0$$

(подстановка же в (103,3) не дает ничего нового). Первый интеграл этого уравнения есть

$$\dot{r}^2=f(R)+\frac{F(R)}{r}, \tag{103,7}$$

где $F(R)$ — еще одна произвольная функция. Отсюда

$$\tau=\pm\int\frac{dr}{\sqrt{f+\frac{F}{r}}}.$$

Получающуюся в результате интегрирования зависимость $r(\tau, R)$ можно представить в параметрическом виде:

$$r=\frac{F}{2f}(\operatorname{ch}\eta-1),\quad \tau_0(R)-\tau=\frac{F}{2f^{3/2}}(\operatorname{sh}\eta-\eta)\ \text{при}\ f>0, \tag{103,8}$$

$$r=\frac{F}{-2f}(1-\cos\eta),\quad \tau_0(R)-\tau=\frac{F}{2(-f)^{3/2}}(\eta-\sin\eta)\ \text{при}\ f<0, \tag{103,9}$$

где $\tau_0(R)$ — снова произвольная функция. Если же $f=0$, то

$$r=\left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3}[\tau_0(R)-\tau]^{2/3}\quad \text{при}\quad f=0. \tag{103,10}$$

Во всех случаях, подставив (103,6) в (103,4) и исключив f с помощью (103,7), получим следующее выражение для плотности материи[1]):

$$8\pi k\varepsilon=\frac{F'}{r'r^2}. \tag{103,11}$$

Формулы (103,6—11) определяют искомое общее решение[2]). Заметим, что оно зависит всего от двух «физически различных» произвольных функций: хотя в нем фигурируют три функции f,

[1]) Функции F, f, τ_0 должны удовлетворять лишь условиям, обеспечивающим положительность e^{λ}, r и ε. Помимо отмеченного уже условия $1+f>0$, отсюда следует, что и $F>0$. Будем считать также, что и $F'>0$, $r'>0$; тем самым исключаются случаи, приводящие к пересечению сферических слоев веществ при их радиальном движении.

[2]) Из него выпадает, однако, особый случай, в котором $r=r(\tau)$ и не зависит от R, так что уравнение (103,5) сводится к бессодержательному тождеству; см. *В. А. Рубан*, ЖЭТФ 56, 1914 (1969). Этот случай, однако, не соответствует условиям задачи о коллапсе конечного тела.

F, τ_0, но сама координата R может еще быть подвергнута произвольному преобразованию $R = R(R')$. Это число как раз соответствует тому, что наиболее общее центрально-симметричное распределение материи задается двумя функциями (распределение плотности и радиальной скорости материи), а свободного гравитационного поля с центральной симметрией вообще не существует.

Поскольку система отсчета сопутствует материи, то каждой частице вещества отвечает определенное значение R; функция же $r(\tau, R)$ при этом значении R определяет закон движения данной частицы, а производная $\dot{r}$ есть ее радиальная скорость. Важное свойство полученного решения состоит в том, что задание входящих в него произвольных функций в интервале от 0 до некоторого R_0 полностью определяет поведение сферы этого радиуса; оно не зависит от того, каким образом заданы эти функции при $R > R_0$. Тем самым автоматически получается решение внутренней задачи для любой конечной сферы. Полная масса шара дается, согласно (100,23), интегралом

$$m = 4\pi \int_0^{r(\tau, R_0)} \varepsilon r^2 dr = 4\pi \int_0^{R_0} \varepsilon r^2 r' dR.$$

Подставив сюда (103,11) и заметив, что $F(0) = 0$ (при $R = 0$ должно быть и $r = 0$), найдем:

$$m = \frac{F(R_0)}{2k}, \quad r_g = F(R_0) \tag{103,12}$$

(r_g — гравитационный радиус шара).

При $F = \text{const} \neq 0$ из (103,11) имеем $\varepsilon = 0$, так что решение относится к пустому пространству, т. е. описывает поле точечной массы (находящейся в центре — особой точке метрики). Так, положив $F = r_g$, $f = 0$, $\tau_0 = R$, получим метрику (102,3)[1].

Формулы (103,8—10) описывают (в зависимости от пробегаемой параметром η области значений) как сжатие, так и расширение шара; то и другое в равной степени допускаются самими по себе уравнениями поля. Реальной задаче о поведении неустойчивого массивного тела отвечает сжатие — гравитационный коллапс. Решения (103,8—10) выписаны таким образом, что сжатие имеет место, когда τ, увеличиваясь, стремится к τ_0. Моменту $\tau = \tau_0(R)$ отвечает достижение центра веществом с заданной радиальной координатой R (при этом должно быть $\tau_0' > 0$).

---

[1]) Случай же $F = 0$ (причем из (103,7): $r = \sqrt{f}\,(\tau - \tau_0)$) соответствует отсутствию поля; надлежащим преобразованием переменных метрика может быть приведена к галилеевой.

Предельный характер метрики внутри шара при $\tau \to \tau_0(R)$ одинаков во всех трех случаях (103,8—10):

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2F}{3}\right)^{1/3} \frac{\tau_0'}{\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{-1/3}. \quad (103,13)$$

Это значит, что все радиальные расстояния (в рассматриваемой сопутствующей системе отсчета) стремятся к бесконечности, а окружные — к нулю, причем все объемы тоже стремятся к нулю (как $\tau - \tau_0$)[1]). Соответственно этому плотность материи неограниченно возрастает[2]):

$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{2F'}{3F\tau_0'(\tau_0 - \tau)}. \quad (103,14)$$

Таким образом, в соответствии со сказанным в § 102, происходит коллапс всего распределения материи в центр[3]).

В частном случае, когда функция $\tau_0(R) = \text{const}$ (т. е. все частицы достигают центра одновременно), метрика внутри сжимающегося шара имеет другой характер. В этом случае

$$r \approx \left(\frac{9F}{4}\right)^{1/3} (\tau_0 - \tau)^{2/3}, \quad e^{\lambda/2} \approx \left(\frac{2}{3}\right)^{1/3} \frac{F'}{2F^{2/3}\sqrt{1+f}} (\tau_0 - \tau)^{2/3},$$

$$8\pi k\varepsilon \approx \frac{4}{3(\tau_0 - \tau)^2}, \quad (103,15)$$

т. е. при $\tau \to \tau_0$ все расстояния — как окружные, так и радиальные — стремятся к нулю по одинаковому закону $\sim (\tau_0 - \tau)^{2/3}$; плотность материи стремится к бесконечности как $(\tau_0 - \tau)^{-2}$, причем в пределе ее распределение становится однородным.

Обратим внимание на то, что во всех случаях момент прохождения поверхности коллапсирующего шара под шварцшильдову сферу ($r(\tau, R_0) = r_g$) ничем не замечателен для его внутренней динамики (описываемой метрикой в сопутствующей системе отсчета). В каждый момент времени, однако, определенная часть шара уже находится под своим «горизонтом событий».

---

[1]) Геометрия на проходящей через центр «плоскости» при этом такая, которая была бы на конусообразной поверхности вращения, растягивающейся с течением времени по своим образующим и одновременно сжимающейся по всем своим окружностям.

[2]) Тот факт, что в рассматриваемом решении коллапс возникает при любой массе шара — естественное следствие пренебрежения давлением. Разумеется, при $\varepsilon \to \infty$ предположение о пылевидности вещества с физической точки зрения во всяком случае непригодно, и следует пользоваться ультрарелятивистским уравнением состояния $p = \varepsilon/3$. Оказывается, однако, что общий характер предельных законов сжатия в значительной степени не зависит от уравнения состояния материи (см. *Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, ЖЭТФ **39**, 149 (1960)).

[3]) Случай $\tau_0 = \text{const}$ включает в себя, в частности, и коллапс полностью однородного шара — см. задачу.

Подобно тому, как $F(R_0)$ определяет, согласно (103,12), гравитационный радиус шара в целом, так $F(R)$ для любого заданного значения R есть гравитационный радиус части шара, расположенный под сферической поверхностью $R = \text{const}$; поэтому указанная часть шара определяется в каждый момент времени τ условием $r(\tau, R) \leqslant F(R)$.

Наконец, покажем, каким образом полученными формулами можно воспользоваться для решения поставленного в конце § 102 вопроса: построения наиболее полной системы отсчета для поля точечной массы [1]).

Для достижения этой цели надо исходить из такой метрики в пустоте, которая содержала бы как сжимающуюся, так и расширяющуюся пространственно-временные области. Таковым является решение (103,9), в котором надо положить $F = \text{const} = r_g$. Выбрав также

$$f = -\frac{1}{(R/r_g)^2 + 1}, \quad \tau_0 = \frac{\pi}{2} r_g (-f)^{-3/2},$$

получим:

$$\frac{r}{r_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)(1 - \cos\eta),$$
$$\frac{\tau}{r_g} = \frac{1}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2} + 1\right)^{3/2}(\pi - \eta + \sin\eta); \tag{103,16}$$

когда параметр η пробегает значения от 2π до 0, время τ (при заданном R) монотонно возрастает, а r возрастает от нуля, проходит через максимум и снова убывает до нуля.

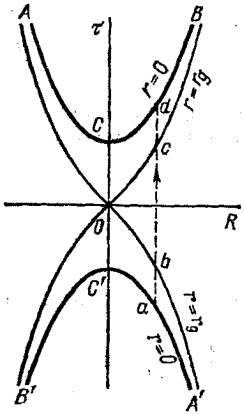

Рис. 24

На рис. 24 линии ACB и $A'C'B'$ отвечают точке $r = 0$ (им соответствуют значения параметра $\eta = 2\pi$ и $\eta = 0$). Линии AOA' и BOB' отвечают шварцшильдовой сфере $r = r_g$. Между $A'C'B'$ и $A'OB'$ расположена пространственно-временная область, в которой возможно лишь движение от центра, а между ACB и AOB — область, в которой движение происходит лишь по направлению к центру.

Мировая линия частицы, покоящейся относительно данной системы отсчета, — вертикальная прямая ($R = \text{const}$). Она начинается от $r = 0$ (точка a), пересекает сферу Шварцшильда в точке b, достигает в момент $\tau = 0$ наибольшего удаления $(r = r_g(R^2/r_g^2 + 1))$, затем частица снова начинает падать к сфе-

[1]) Такая система была впервые найдена *Крускалом* (*M. Kruskal*, 1960) в других переменных (см. Phys. Rev. 119, 1743 (1960)). Приведенная ниже форма решения, в котором система отсчета синхронна, принадлежит *И. Д. Новикову* (1963).

ре Шварцшильда, пересекает ее в точке c и вновь достигает $r=0$ (точка d) в момент

$$\tau = r_g \frac{\pi}{2}\left(\frac{R^2}{r_g^2}+1\right)^{3/2}.$$

Полученная система является полной: оба конца мировой линии всякой движущейся в поле частицы лежат либо на истинной особенности $r=0$, либо уходят на бесконечность. Не полная же метрика (102,3) охватывает собой только область правее линии AOA' (или левее BOB'), а такая же «расширяющаяся» система отсчета — область справа от BOB' (или слева от AOA'). Что же касается шварцшильдовой системы отсчета с метрикой (100,14), то она охватывает лишь область справа от BOA' (или слева от AOB').

Задача

Найти решение внутренней задачи для гравитационного коллапса пылевидной однородной сферы, вещество которой в начальный момент покоится.

Решение. Положив

$$\tau_0 = \text{const}, \qquad f = -\sin^2 R, \qquad F = 2a_0 \sin^3 R,$$

получим

$$r = a_0 \sin R\,(1-\cos\eta), \qquad \tau - \tau_0 = a_0(\eta - \sin\eta) \tag{1}$$

(радиальная координата R здесь безразмерна и пробегает значения от 0 до 2π). При этом плотность

$$8\pi k\varepsilon = \frac{6}{a_0^2(1-\cos\eta)^3} \tag{2}$$

и при заданном τ не зависит от R, т. е. шар однороден. Метрику (103,1) с r из (1) можно представить в виде

$$ds^2 = d\tau^2 - a^2(\tau)\,[dR^2 + \sin^2 R\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2)], \tag{3}$$
$$a = a_0(1-\cos\eta).$$

Обратим внимание на то, что она совпадает с решением Фридмана для метрики мира, полностью заполненного однородной пылевидной материей (§ 112), — вполне естественный результат, поскольку сфера, вырезанная из однородного распределения материи, обладает центральной симметрией [1]).

Поставленному начальному условию можно удовлетворить решением (1) с определенным выбором постоянных a_0, τ_0. Изменив здесь для удобства определение параметра ($\eta \to \pi - \eta$), представим решение в виде

$$r = \frac{r_0}{2}\frac{\sin R}{\sin R_0}(1+\cos\eta), \qquad \tau = \frac{r_0}{2\sin R_0}(\eta + \sin\eta), \tag{4}$$

причем (согласно (103,12)) гравитационный радиус шара $r_g = r_0 \sin^2 R_0$. В начальный момент ($\tau=0$, $\eta=0$) вещество покоится ($\dot r = 0$), а $2\pi r_0 = 2\pi r(0, R_0)$ — начальная длина окружности шара. Падение всего вещества в центр происходит в момент $\tau = \pi r_0/2\sin R_0$.

---

[1]) Метрика (3) отвечает пространству постоянной положительной кривизны. Аналогичным образом, положив $f = \operatorname{sh}^2 R$, $F = 2a_0 \operatorname{sh}^3 R$, получим решение, отвечающее пространству постоянной отрицательной кривизны (§ 113).

Время t в системе отсчета удаленного наблюдателя (шварцшильдова система) связано с собственным временем на шаре τ уравнением

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}},$$

где под r надо понимать значение $r(\tau, R_0)$, отвечающее поверхности шара. Интегрирование этого уравнения приводит к следующему выражению t в функции того же параметра η:

$$\frac{t}{r_g} = \ln \frac{\operatorname{ctg} R_0 + \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ctg} R_0 - \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \operatorname{ctg} R_0 \left[\eta + \frac{1}{2 \sin^2 R_0} (\eta + \sin \eta)\right] \tag{5}$$

(причем момент $t = 0$ отвечает моменту $\tau = 0$). Прохождению поверхности шара через шварцшильдову сферу ($r(\tau, R_0) = r_g$) отвечает значение параметра η, определяемое равенством

$$\cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{r_g}{r_0} = \sin^2 R_0.$$

При приближении к этому значению время $t \to \infty$ — в соответствии со сказанным в § 102 [1]).

§ 104. Гравитационный коллапс несферических и вращающихся тел

Все сказанное в двух предыдущих параграфах в своем буквальном виде относилось к телам, строго сферически-симметричным. Простые соображения показывают, однако, что качественная картина гравитационного коллапса остается той же и для тел с малыми отклонениями от сферической симметрии (*А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, 1965).

Будем сначала говорить о телах, отклонение которых от центральной симметрии связано с распределением вещества в них, но не с вращением тела как целого.

Очевидно, что если массивное центрально-симметричное тело гравитационно неустойчиво, то эта неустойчивость сохранится и при малом нарушении симметрии, так что и такое тело будет коллапсировать. Рассматривая слабую асимметрию как малое возмущение, можно проследить за его развитием (в сопутствующей системе отсчета) в ходе сжатия тела. Возмущения, вообще говоря, возрастают по мере увеличения плотности тела. Но если возмущения были достаточно малы в начале сжатия, то они останутся еще малыми и в момент достижения телом гравитационного радиуса; в § 103 было отмечено, что этот момент

---

[1]) Функция $r(\tau, R_0)$, определяемая формулами (4), совпадает, конечно, с функцией, вычисленной по внешней метрике и даваемой интегралом (102,8). То же самое относится к функции $t(r)$, определяемой формулами (4) и (5), — она совпадает с даваемой интегралом (102,5).