Время t в системе отсчета удаленного наблюдателя (шварцшильдова система) связано с собственным временем на шаре τ уравнением

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}},$$

где под r надо понимать значение $r(\tau, R_0)$, отвечающее поверхности шара. Интегрирование этого уравнения приводит к следующему выражению t в функции того же параметра η:

$$\frac{t}{r_g} = \ln \frac{\operatorname{ctg} R_0 + \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}}{\operatorname{ctg} R_0 - \operatorname{tg} \frac{\eta}{2}} + \operatorname{ctg} R_0 \left[\eta + \frac{1}{2 \sin^2 R_0} (\eta + \sin \eta)\right] \tag{5}$$

(причем момент $t = 0$ отвечает моменту $\tau = 0$). Прохождению поверхности шара через шварцшильдову сферу ($r(\tau, R_0) = r_g$) отвечает значение параметра η, определяемое равенством

$$\cos^2 \frac{\eta}{2} = \frac{r_g}{r_0} = \sin^2 R_0.$$

При приближении к этому значению время $t \to \infty$ — в соответствии со сказанным в § 102 [1]).

§ 104. Гравитационный коллапс несферических и вращающихся тел

Все сказанное в двух предыдущих параграфах в своем буквальном виде относилось к телам, строго сферически-симметричным. Простые соображения показывают, однако, что качественная картина гравитационного коллапса остается той же и для тел с малыми отклонениями от сферической симметрии (*А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, 1965).

Будем сначала говорить о телах, отклонение которых от центральной симметрии связано с распределением вещества в них, но не с вращением тела как целого.

Очевидно, что если массивное центрально-симметричное тело гравитационно неустойчиво, то эта неустойчивость сохранится и при малом нарушении симметрии, так что и такое тело будет коллапсировать. Рассматривая слабую асимметрию как малое возмущение, можно проследить за его развитием (в сопутствующей системе отсчета) в ходе сжатия тела. Возмущения, вообще говоря, возрастают по мере увеличения плотности тела. Но если возмущения были достаточно малы в начале сжатия, то они останутся еще малыми и в момент достижения телом гравитационного радиуса; в § 103 было отмечено, что этот момент

---

[1]) Функция $r(\tau, R_0)$, определяемая формулами (4), совпадает, конечно, с функцией, вычисленной по внешней метрике и даваемой интегралом (102,8). То же самое относится к функции $t(r)$, определяемой формулами (4) и (5), — она совпадает с даваемой интегралом (102,5).

ничем не замечателен для внутренней динамики сжимающегося тела, а его плотность, разумеется, еще конечна [1]).

В силу малости внутренних возмущений в теле остаются малыми также и возмущения создаваемого им внешнего центрально-симметричного гравитационного поля. Это значит, что остается почти неизменной также и поверхность «горизонта событий» — шварцшильдова сфера, и ничто не мешает коллапсирующему телу (в сопутствующей системе отсчета) пересечь ее.

О дальнейшем нарастании возмущений внутри тела к внешнему наблюдателю не поступает никаких сведений, поскольку из-под горизонта событий не выходят никакие сигналы; весь этот процесс остается «за временной бесконечностью» удаленного наблюдателя. Отсюда, в свою очередь, следует, что по отношению к внешней системе отсчета гравитационное поле коллапсирующего тела должно стремиться к стационарности, когда тело асимптотически приближается к гравитационному радиусу. Характерное время этого приближения очень мало ($\sim r_g/c$), и по его истечении можно считать, что во внешнем пространстве остаются лишь ранее возникшие возмущения центрально-симметричного поля. Но все переменные возмущения должны с течением времени рассеяться в пространстве, как гравитационные волны, уходя на бесконечность (или проходя под горизонт).

Во внешнем гравитационном поле возникающего коллапсара не могут остаться также и не зависящие от времени, статические возмущения. Этот вывод можно извлечь из анализа постоянных возмущений, налагаемых на шварцшильдово поле в пустоте. Такой анализ показывает, что в статическом случае всякое (убывающее на бесконечности) возмущение неограниченно возрастает при приближении к шварцшильдовой сфере невозмущенной задачи [2]); между тем для возникновения больших возмущений внешнего поля в данном случае, как уже было указано, нет никаких оснований.

Отклонения от сферической симметрии в распределении плотности тела описываются квадрупольным и высшими мультипольными моментами этого распределения; каждый из них дает свой вклад во внешнее гравитационное поле. Сделанное утверж-

---

[1]) Развитие возмущений в нестационарном безграничном однородном распределении материи рассмотрено в § 115 (полученные там формулы в равной степени относятся как к случаю расширения, так и к случаю сжатия). Неоднородность невозмущенного распределения или ограниченность тела не меняют сделанного утверждения.

[2]) См. *T. Regge, J. A. Wheeler*, Phys. Rev. **108**, 1063 (1957). Подчеркнем, что речь идет о возмущениях, происходящих от самого центрального тела. Поставленное условие на бесконечности исключает случаи, когда статические возмущения исходят от внешних источников: в таких случаях малые возмущения лишь несколько искажают шварцшильдову сферу, не меняя ее качественных свойств и не создавая на ней истинной пространственно-временной особенности.

дение означает, что все такие возмущения внешнего поля затухают на конечных (с точки зрения внешнего наблюдателя) стадиях коллапса[1]). Установившееся гравитационное поле коллапсара оказывается снова центрально-симметричным полем Шварцшильда, определяющимся одной только полной массой тела.

Вопрос о конечной судьбе тела в его коллапсе под горизонтом событий (не наблюдаемом из внешней системы отсчета) не вполне ясен. Можно, по-видимому, утверждать, что и здесь коллапс заканчивается истинной особенностью пространственно-временной метрики, но особенностью совсем другого типа, нежели в центрально-симметричном случае. Этот вопрос, однако, в настоящее время еще не выяснен до конца.

Обратимся к случаю, когда слабое нарушение сферической симметрии связано не только с распределением плотности, но и с вращением тела как целого; предполагаемая малость отклонений от сферической симметрии означает при этом достаточную медленность вращения. Все сказанное выше остается в силе, за одним лишь исключением. Заранее ясно, что в силу сохранения полного момента импульса тела **M** поле коллапсара в этом случае не может зависеть от одной только массы. Этому как раз соответствует то обстоятельство, что среди не зависящих от времени стационарных (но не статических) возмущений центрально-симметричного гравитационного поля есть одно, которое не растет неограниченно при $r \to r_g$. Это возмущение связано именно с вращением тела и описывается добавкой к шварцшильдову метрическому тензору g_{ik} (в координатах $x^0 = t$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) малой недиагональной компоненты[2]):

$$g_{03} = \frac{2kM}{r} \sin^2 \theta \tag{104,1}$$

(см. задачу 1 к § 105). Это выражение остается справедливым (во внешнем пространстве) при приближении тела к гравитационному радиусу, и, таким образом, гравитационное поле медленно вращающегося коллапсара будет (в первом приближении по малому моменту M) центрально-симметричным шварцшильдовым полем с малой поправкой (104,1). Это поле уже не статично, а лишь стационарно.

Если гравитационный коллапс допускается при малых нарушениях сферической симметрии, то коллапс такого же характера (с уходом тела под горизонт событий) должен быть возможен и в некоторой конечной области значительных отклонений от сферичности; условия, определяющие эту область, в настоящее

---

[1]) Закон этого затухания см. *R. H. Price*, Phys. Rev. D 5, 2419, 2439 (1972). Начальные статические l-польные возмущения внешнего гравитационного поля затухают при коллапсе как $1/t^{2l+2}$.

[2]) В этом параграфе полагаем $c = 1$.

время еще не установлены. Вне зависимости от этих условий можно, по-видимому, утверждать, что свойства возникающего в результате такого коллапса образования (вращающегося коллапсара) с точки зрения внешнего наблюдателя не зависят ни от каких характеристик первоначального тела, за исключением лишь его полных массы m и момента M [1]). Если тело не вращается как целое ($M=0$), то внешнее гравитационное поле коллапсара есть центрально-симметричное поле Шварцшильда [2]).

Гравитационное же поле вращающегося коллапсара дается следующей аксиально-симметричной стационарной *метрикой Керра* [3]):

$$ds^2=\left(1-\frac{r_g r}{\rho^2}\right)dt^2-\frac{\rho^2}{\Delta}dr^2-\rho^2 d\theta^2-$$
$$-\left(r^2+a^2+\frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2+\frac{2r_g r a}{\rho^2}\sin^2\theta\, d\varphi\, dt, \qquad (104,2)$$

где введены обозначения

$$\Delta=r^2-r_g r+a^2, \quad \rho^2=r^2+a^2\cos^2\theta, \qquad (104,3)$$

а r_g есть по-прежнему $r_g=2mk$. Эта метрика зависит от двух постоянных параметров, m и a, смысл которых ясен из предельного вида метрики на больших расстояниях r. С точностью до членов $\sim 1/r$ имеем:

$$g_{00}\approx 1-\frac{r_g}{r}, \quad g_{03}\approx\frac{r_g a}{r}\sin^2\theta;$$

сравнение первого выражения с (100,18), а второго с (104,1) показывает, что m есть масса тела, а параметр a связан с моментом M соотношением

$$M=ma \qquad (104,4)$$

---

[1]) Во избежание недоразумений напомним, что мы не рассматриваем тел, несущих на себе нескомпенсированный электрический заряд.

[2]) Это утверждение существенно подкрепляется следующей теоремой Израэля: среди всех статических, галилеевых на бесконечности решений уравнений Эйнштейна с замкнутыми односвязными пространственными поверхностями $g_{00}=\text{const}$, $t=\text{const}$ решение Шварцшильда является единственным без особенностей пространственно-временной метрики, имеющим горизонт ($g_{00}=0$) (доказательство этого утверждения: см. *W. Israel*, Phys. Rev. **164**, 1776 (1967)).

[3]) Это решение уравнений Эйнштейна было открыто *Керром* (*R. Kerr*, 1963) в другом виде и приведено к форме (104,2) *Бойером* и *Линдквистом* (*R. H. Boyer*, *R. W. Lindquist*, 1967). В литературе нет конструктивного аналитического вывода метрики (104,2), адекватного ее физическому смыслу, и даже прямая проверка этого решения уравнений Эйнштейна связана с громоздкими вычислениями. Утверждение об единственности метрики Керра как поля вращающегося коллапсара подкрепляется теоремой, аналогичной упомянутой выше теореме Израэля для поля Шварцшильда (см. *B. Carter*, Phys. Rev. Lett. **26**, 331 (1971)).

($M = mac$ в обычных единицах). При $a = 0$ метрика Керра переходит в шварцшильдову метрику в ее стандартном виде (100,14)[1]. Обратим внимание также на то, что форма (104,2) в явном виде выявляет симметрию по отношению к обращению времени: это преобразование ($t \to -t$) меняет также и направление вращения, т. е. знак момента ($a \to -a$), в результате чего ds^2 остается неизменным.

Определитель метрического тензора из (104,2):

$$-g = \rho^4 \sin^2\theta. \tag{104,5}$$

Приведем также контравариантные компоненты g^{ik}, сведя их в следующем выражении для квадрата оператора 4-градиента:

$$g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{1}{\Delta}\left(r^2 + a^2 + \frac{r_g r a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 -$$
$$- \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{1}{\Delta \sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_g r}{\rho^2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{2 r_g r a}{\rho^2 \Delta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial t}. \tag{104,6}$$

При $m = 0$, в отсутствие тяготеющей массы, метрика (104,2) должна сводиться к галилеевой. Действительно, выражение

$$ds^2 = dt^2 - \frac{\rho^2}{r^2 + a^2}dr^2 - \rho^2 d\theta^2 - (r^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{104,7}$$

представляет собой галилееву метрику

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

написанную в пространственных сплюснутых сфероидальных координатах; преобразование этих координат в декартовы осуществляется формулами

$$x = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \sqrt{r^2 + a^2}\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = r\cos\theta;$$

поверхности $r = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения:

$$\frac{x^2 + y^2}{r^2 + a^2} + \frac{z^2}{r^2} = 1.$$

Метрика (104,2) имеет фиктивные особенности, подобно тому как метрика Шварцшильда (100,14) имеет фиктивную особенность при $r = r_g$. Но в то время как в шварцшильдовом случае на поверхности $r = r_g$ происходит одновременное обращение g_{00}

[1]) С точностью же до членов первого порядка по a метрика (104,2) при $a \ll 1$ отличается от метрики Шварцшильда лишь членом $(2r_g a/r)\sin^2\theta\, d\varphi\, dt$ — в согласии со сказанным выше о случае слабого отклонения от сферической симметрии.

в нуль и g_{11} в бесконечность, в метрике Керра эти две поверхности разделены. Равенство $g_{00}=0$ имеет место при $\rho^2=rr_g$; бо́льший из двух корней этого квадратного уравнения есть

$$r_0=\frac{r_g}{2}+\sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2-a^2\cos^2\theta}\quad (g_{00}=0). \tag{104,8}$$

Обращение же g_{11} в бесконечность имеет место при $\Delta=0$; бо́льший из двух корней этого уравнения:

$$r_{\text{гор}}=\frac{r_g}{2}+\sqrt{\left(\frac{r_g}{2}\right)^2-a^2}\quad (g_{11}=\infty). \tag{104,9}$$

Поверхности $r=r_0$ и $r=r_{\text{гор}}$, физический смысл которых выяснится ниже, будем обозначать для краткости символами S_0 и $S_{\text{гор}}$. Поверхность $S_{\text{гор}}$ представляет собой сферу, а S_0 — сплюснутую фигуру вращения, причем $S_{\text{гор}}$ заключена внутри S_0 и обе поверхности касаются друг друга в полюсах ($\theta=0$ и $\theta=\pi$).

Как видно из (104,8—9), поверхности S_0 и $S_{\text{гор}}$ существуют только при $a\leqslant r_g/2$. При $a>r_g/2$ характер метрики (104,2) радикально меняется, причем в ней появляются физически недопустимые свойства, нарушающие принцип причинности[1]).

Потеря смысла метрикой Керра при $a>r_g/2$ означает, что значение

$$a_{\max}=\frac{r_g}{2},\quad M_{\max}=\frac{mr_g}{2} \tag{104,10}$$

дает верхнюю границу возможных значений момента коллапсара. При этом, по-видимому, его надо рассматривать как предельное значение, к которому можно подойти сколь угодно близко, но точное равенство $a=a_{\max}$ невозможно. Соответствующие предельные значения радиусов поверхностей S_0 и $S_{\text{гор}}$:

$$r_0=\frac{r_g}{2}(1+\sin\theta),\quad r_{\text{гор}}=\frac{r_g}{2}. \tag{104,11}$$

Покажем, что поверхность $S_{\text{гор}}$ является горизонтом событий, пропускающим движущиеся частицы и лучи света лишь в одном направлении — внутрь.

Предварительно покажем с более общей точки зрения, что свойством одностороннего пропускания мировых линий движущихся частиц обладает всякая нулевая гиперповерхность (т. е.

---

[1]) Эти нарушения проявляются в появлении замкнутых времениподобных мировых линий: они давали бы возможность отправиться в прошлое с дальнейшим возвращением в будущее. Сразу же упомянем, что такие же нарушения появляются при продолжении метрики Керра внутрь $S_{\text{гор}}$ уже и при $a<r_g/2$, что свидетельствует о физической неприменимости этой метрики внутри $S_{\text{гор}}$ (мы вернемся еще к этому обстоятельству ниже). По этой же причине не представляют физического интереса поверхности, определяемые меньшими корнями квадратных уравнений $g_{00}=0$ и $1/g_{11}=0$ и лежащие внутри $S_{\text{гор}}$; см. *B. Carter*, Phys. Rev. **174**, 1559 (1968).

гиперповерхность, нормаль к которой в каждой ее точке является нулевым 4-вектором). Пусть гиперповерхность задана уравнением $f(x^0, x^1, x^2, x^3) = \text{const}$. Нормаль к ней направлена вдоль 4-градиента $n_i = \partial f/\partial x^i$, так что для нулевой гиперповерхности имеем $n_i n^i = 0$. Это значит, другими словами, что направление нормали лежит в самой гиперповерхности: вдоль гиперповерхности $df = n_i dx^i = 0$ и это равенство выполняется, когда направления 4-векторов dx^i и n^i совпадают. При этом, в силу того же свойства $n_i n^i = 0$, элемент длины на гиперповерхности в том же направлении: $ds = 0$. Другими словами, вдоль этого направления гиперповерхность касается в данной точке построенного из этой точки светового конуса. Таким образом, построенные (скажем, в сторону будущего) из каждой точки нулевой гиперповерхности световые конусы лежат целиком по одну из ее сторон, касаясь (в этих точках) гиперповерхности вдоль одной из своих образующих. Но это свойство как раз и означает, что (направленные в будущее) мировые линии частиц или световых лучей могут пересекать гиперповерхность лишь в одну сторону.

Описанное свойство нулевых гиперповерхностей имеет обычно физически тривиальный характер: одностороннее пропускание через них выражает собой просто невозможность движения со скоростью, большей скорости света (простейший пример такого рода: гиперплоскость $x = t$ в плоском пространстве-времени). Нетривиальная новая физическая ситуация возникает, когда нулевая гиперповерхность не простирается на пространственную бесконечность, так что ее сечения $t = \text{const}$ представляют собой замкнутые пространственные поверхности; эти поверхности и являются горизонтом событий в том смысле, как это было описано для шварцшильдовой сферы в центрально-симметричном гравитационном поле.

Такой же является и поверхность $S_{\text{гор}}$ в поле Керра. Действительно, условие $n_i n^i = 0$ для гиперповерхности вида $f(r,\theta) = \text{const}$ в поле Керра имеет вид

$$g^{11}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + g^{22}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{\rho^2}\left[\Delta\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2\right] = 0 \quad (104,12)$$

(g^{ik} из (104,6)). Это уравнение не выполняется на S_0, но выполняется на $S_{\text{гор}}$ (для которой $\partial f/\partial\theta = 0$, $\Delta = 0$).

Продолжение метрики Керра внутрь поверхности горизонта (подобно тому, как это было показано в §§ 102, 103 для метрики Шварцшильда) не имеет физического смысла. Такое продолжение зависело бы лишь от тех же двух параметров (m и a), что и поле вне $S_{\text{гор}}$, и уже отсюда ясно, что оно не могло бы иметь отношения к физической задаче о судьбе коллапсирующего тела после его ухода под горизонт. Эффекты несферичности в сопутствующей системе отсчета отнюдь не затухают, а, напротив,

должны нарастать при дальнейшем сжатии тела, и потому нет никаких оснований ожидать, чтобы поле под горизонтом могло определяться лишь полными массой и моментом тела [1]).

Обратимся к свойствам поверхности S_0 и пространства между нею и горизонтом (эту область поля Керра называют *эргосферой*).

Основное свойство эргосферы состоит в том, что никакая частица здесь не может оставаться в покое по отношению к системе отсчета удаленного наблюдателя: при r, θ, $\varphi = \text{const}$ имеем $ds^2 < 0$, т. е. интервал не времениподобен, как это должно было бы быть для мировой линии частицы; переменная t теряет свой временной характер. Таким образом, жесткая система отсчета не может простираться от бесконечности внутрь эргосферы, и в этом смысле поверхность S_0 можно назвать пределом стационарности.

Характер движения, в котором должны находиться частицы в эргосфере, существенно отличается от того, что мы имели внутри горизонта в поле Шварцшильда. В последнем случае частицы тоже не могли покоиться относительно внешней системы отсчета, причем для них было невозможно $r = \text{const}$: все частицы должны двигаться радиально по направлению к центру. В эргосфере же поля Керра для частицы невозможно $\varphi = \text{const}$ (частицы непременно должны вращаться вокруг оси симметрии поля), но $r = \text{const}$ для частицы возможно. Более того, частицы (и световые лучи) могут двигаться как с уменьшением, так и с увеличением r, выходя при этом из эргосферы во внешнее пространство. В соответствии с последним обстоятельством находится также и возможность достижения эргосферы частицей, приходящей из внешнего пространства: время достижения поверхности S_0 такой частицей (или лучом света), отсчитываемое по часам t удаленного наблюдателя, конечно для всей S_0, за исключением лишь ее полюсов, в которых S_0 касается $S_{\text{гор}}$, время достижения этих точек, как и всей $S_{\text{гор}}$, разумеется, попрежнему бесконечно [2]).

Ввиду неизбежности вращательного движения частиц в эргосфере естественная форма представления метрики в этой области:

$$ds^2 = \left(g_{00} - \frac{g_{03}^2}{g_{33}}\right) dt^2 + g_{11} dr^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33}\left(d\varphi + \frac{g_{03}}{g_{33}} dt\right)^2. \quad (104,13)$$

---

[1]) Математически эта ситуация проявляется в упомянутом уже нарушении принципа причинности при продолжении метрики Керра внутрь $S_{\text{гор}}$.

[2]) Время достижения отдельных точек S_0 может оказаться бесконечным также и в частных случаях специальных значений энергии и момента импульса частицы, подобранных так, чтобы радиальная скорость обращалась в нуль в данной точке на S_0.

Коэффициент при dt^2

$$g_{00}-\frac{g_{03}^2}{g_{33}}=\frac{\Delta}{r^2+a^2+r_g r a^2\sin^2\theta/\rho^2}$$

положителен везде вне $S_{\text{гор}}$ (и не обращается в нуль при S_0); интервал ds при $r=\text{const}$, $\theta=\text{const}$, $d\varphi=-(g_{03}/g_{33})\,dt$ времениподобен. Величина

$$-\frac{g_{03}}{g_{33}}=\frac{r_g a r}{\rho^2(r^2+a^2)+r_g r a^2\sin^2\theta} \tag{104,14}$$

играет роль общей «угловой скорости вращения эргосферы» относительно внешней системы отсчета (причем направление этого вращения совпадает с направлением вращения центрального тела)[1]).

Энергия частицы, определенная как производная $-\partial S/\partial\tau$ от действия по собственному времени частицы τ, синхронизованному вдоль траектории, всегда положительна (см. § 88). Но, как было объяснено в § 88, при движении частицы в поле, не зависящем от переменной t, сохраняется энергия $\mathscr{E}_0$, определенная как производная $-\partial S/\partial t$; эта величина совпадает с ковариантной компонентой 4-импульса $p_0=mu_0=mg_{0i}dx^i$ (здесь m — масса частицы). Тот факт, что переменная t (время по часам удаленного наблюдателя) не имеет в эргосфере временного характера, приводит к своеобразной ситуации: в этой области $g_{00}<0$, и потому величина

$$\mathscr{E}_0=m(g_{00}u^0+g_{03}u^3)=m\left(g_{00}\frac{dt}{ds}+g_{03}\frac{d\varphi}{ds}\right)$$

может быть отрицательной. Поскольку во внешнем пространстве, где t — время, энергия $\mathscr{E}_0$ не может быть отрицательной, то частица с $\mathscr{E}_0<0$ не может попасть в эргосферу извне. Возможный источник возникновения такой частицы состоит в распаде влетающего в эргосферу тела, скажем, на две части, из которых одна захватывается на орбиту с «отрицательной энер-

---

[1]) Обратим внимание на то, что интервалы собственного времени для частиц, движущихся вдоль границы эргосферы, не обращаются в нуль вместе с g_{00}. В этом смысле S_0 не является поверхностью «бесконечного красного смещения»; частоты световых сигналов, посылаемых с нее движущимся источником (покоиться источник здесь вообще не может) и наблюдаемых удаленным наблюдателем, не обращаются в нуль. Напомним, что на шварцшильдовой сфере в центрально-симметричном поле вообще не могли находиться ни неподвижные, ни движущиеся источники (нулевая гиперповерхность не может содержать в себе времениподобных мировых линий). «Бесконечное красное смещение» состояло в этом случае в стремлении к нулю при $r\to r_g$ интервалов собственного времени $d\tau=\sqrt{g_{00}}\,dt$ (при заданном dt), отсчитываемых по неподвижным относительно системы отсчета часам.

гией». Эта часть уже не может выйти из эргосферы и в конце концов захватывается внутрь горизонта. Вторая же часть может выйти обратно во внешнее пространство; поскольку $\mathscr{E}_0$ — сохраняющаяся аддитивная величина, то энергия этой части окажется при этом больше энергии первоначального тела — произойдет извлечение энергии из вращающегося коллапсара (*R. Penrose*, 1969).

Наконец, отметим, что хотя поверхность S_0 не является особой для пространственно-временной метрики, чисто пространственная метрика (в системе отсчета (104,2)) имеет здесь особенность. Вне S_0, где переменная t имеет временной характер, пространственный метрический тензор вычисляется по (84,7) и элемент пространственного расстояния имеет вид

$$dl^2 = \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\Delta \sin^2\theta}{1 - rr_g/\rho^2} d\varphi^2. \qquad (104,15)$$

Вблизи S_0 длины параллелей ($\theta = \text{const}$, $r = \text{const}$) стремятся к бесконечности по закону $2\pi a \sin^2\theta/\sqrt{g_{00}}$. Здесь же стремится к бесконечности также и разность показаний часов (см. (88,5)) при их синхронизации вдоль этого замкнутого контура.

Задачи

1. Произвести разделение переменных в уравнении Гамильтона — Якоби для частицы, движущейся в поле Керра (*B. Carter*, 1968).

Решение. В уравнении Гамильтона — Якоби

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} - m^2 = 0$$

(m — масса частицы, не смешивать с массой центрального тела!) с g^{ik} из (104,6) время t и угол φ — циклические переменные; поэтому они входят в действие S в виде $-\mathscr{E}_0 t + L\varphi$, где $\mathscr{E}_0$ — сохраняющаяся энергия, а посредством L обозначена компонента момента частицы вдоль оси симметрии поля. Оказывается, что и переменные θ и r могут быть разделены. Представив S в виде

$$S = -\mathscr{E}_0 t + L\varphi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \qquad (1)$$

сведем уравнение Гамильтона — Якоби к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям (ср. I § 48):

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2 + \left(a\mathscr{E}_0 \sin\theta - \frac{L}{\sin\theta}\right)^2 + a^2 m^2 \cos^2\theta = K,$$
$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2 - \frac{1}{\Delta}\left[(r^2 + a^2)\mathscr{E}_0 - aL\right]^2 + m^2 r^2 = -K, \qquad (2)$$

где K (параметр разделения) — новая произвольная постоянная. Функции S_θ и S_r определяются отсюда простыми квадратурами.

4-импульс частицы:

$$p^i = m\frac{dx^i}{ds} = g^{ik} p_k = -g^{ik}\frac{\partial S}{\partial x^k}.$$

Вычисляя правую сторону этого равенства с помощью (1) и (2), получим следующие уравнения:

$$m\frac{dt}{ds}=-\frac{r_g ra}{\rho^2\Delta}L+\frac{\mathscr{E}_0}{\Delta}\left(r^2+a^2+\frac{r_g ra^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right), \tag{3}$$

$$m\frac{d\varphi}{ds}=\frac{L}{\Delta\sin^2\theta}\left(1-\frac{r_g r}{\rho^2}\right)+\frac{r_g ra}{\rho^2\Delta}\mathscr{E}_0, \tag{4}$$

$$m^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=\frac{1}{\rho^4}\left[(r^2+a^2)\mathscr{E}_0-aL\right]^2-\frac{\Delta}{\rho^4}(K+m^2r^2), \tag{5}$$

$$m^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2=\frac{1}{\rho^4}(K-a^2m^2\cos^2\theta)-\frac{1}{\rho^4}\left(a\mathscr{E}_0\sin\theta-\frac{L}{\sin\theta}\right)^2. \tag{6}$$

Эти равенства — первые интегралы уравнений движения (уравнений геодезических линий). Уравнение траектории и зависимость координат от времени вдоль траекторий могут быть найдены либо из (3)—(6), либо прямо из уравнений

$$\partial S/\partial\mathscr{E}_0=\text{const},\qquad \partial S/\partial L=\text{const},\qquad \partial S/\partial K=\text{const}.$$

Для световых лучей в правых сторонах уравнений (3)—(6) надо положить $m=0$ и писать ω_0 вместо $\mathscr{E}_0$ (ср. § 101), а в левых сторонах вместо производных md/ds надо писать производные $d/d\lambda$ по параметру λ, меняющемуся вдоль лучей (ср. § 87).

Уравнения (4)—(6) допускают чисто радиальное движение лишь вдоль оси вращения тела, как это ясно уже из соображений симметрии. Из тех же соображений ясно, что движение в одной «плоскости» возможно, лишь если эта плоскость экваториальная. В последнем случае, положив $\theta=\pi/2$ и выразив K через $\mathscr{E}_0$ и L из условия $d\theta/ds=0$, получим уравнения движения в виде

$$m\frac{dt}{ds}=-\frac{r_g a}{r\Delta}L+\frac{\mathscr{E}_0}{\Delta}\left(r^2+a^2+\frac{r_g a^2}{r}\right), \tag{7}$$

$$m\frac{d\varphi}{ds}=\frac{M}{\Delta}\left(1-\frac{r_g}{r}\right)+\frac{r_g a}{r\Delta}\mathscr{E}_0, \tag{8}$$

$$m^2\left(\frac{dr}{ds}\right)^2=\frac{1}{r^4}\left[(r^2+a^2)\mathscr{E}_0-aL\right]^2-\frac{\Delta}{r^4}\left[(a\mathscr{E}_0-L)^2+m^2r^2\right]. \tag{9}$$

2. Определить радиус ближайшей к центру устойчивой круговой орбиты частицы, движущейся в экваториальной плоскости предельного ($a\to r_g/2$) поля Керра (*R. Ruffini, J. A. Wheeler*, 1969).

Решение. Поступая аналогично решению задачи 1 § 102, вводим «эффективную потенциальную энергию» $U(r)$, определенную согласно

$$\left[(r^2+a^2)U(r)-aL\right]^2-\Delta\left[(aU(r)-L)^2+r^2m^2\right]=0$$

(при $\mathscr{E}_0=U$ правая сторона уравнения (9) обращается в нуль). Радиусы устойчивых орбит определяются минимумами функции $U(r)$, т. е. совместным решением уравнений $U(r)=\mathscr{E}_0$, $U'(r)=0$ при $U''(r)>0$. Ближайшей к центру орбите отвечает равенство $U''(r_{\min})=0$; при $r<r_{\min}$ функция $U(r)$ не имеет минимумов. В результате получаются следующие значения параметров движения:

а) При $L<0$, т. е. при движении частицы в направлении, обратном направлению вращения коллапсара:

$$\frac{r_{\min}}{r_g}=\frac{9}{2},\qquad \frac{\mathscr{E}_0}{m}=\frac{5}{3\sqrt{3}},\qquad \frac{L}{mr_g}=\frac{11}{3\sqrt{3}}.$$

б) При $L > 0$ (движение в направлении вращения коллапсара) при $a \to r_g/2$ радиус $r_{\min}$ стремится к радиусу горизонта. Положив $a = \frac{r_g}{2}(1+\delta)$, получим при $\delta \to 0$:

$$\frac{r_{\text{гор}}}{r_g} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2\delta}), \qquad \frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{1}{2}[1+(4\delta)^{1/3}].$$

При этом

$$\frac{\mathscr{E}_0}{m} = \frac{L}{mr_g} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1+(4\delta)^{1/3}].$$

Обратим внимание на то, что все время остается $r_{\min}/r_{\text{гор}} > 1$, т. е. орбита проходит вне горизонта. Так и должно было быть: горизонт представляет собой нулевую гиперповерхность, в которой не могут лежать времениподобные мировые линии движущихся частиц.

§ 105. Гравитационное поле вдали от тел

Рассмотрим стационарное гравитационное поле на больших расстояниях r от создающего его тела и определим первые члены его разложения по степеням $1/r$.

Вдали от тела поле слабое. Это значит, что метрика пространства-времени здесь почти галилеева, т. е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора почти равны своим галилеевым значениям:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{105,1}$$

Соответственно этому представим g_{ik} в виде

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \tag{105,2}$$

где h_{ik} — малые поправки, определяющие гравитационное поле.

Оперируя с тензором h_{ik}, условимся в дальнейшем поднимать и опускать его индексы с помощью «невозмущенной» метрики: $h_i^k = g^{(0)kl}h_{il}$ и т. п. При этом необходимо отличать h^{ik} от поправок в контравариантных компонентах метрического тензора g^{ik}. Последние определяются решением уравнений

$$g_{il}g^{lk} = (g_{il}^{(0)} + h_{il})\,g^{lk} = \delta_i^k;$$

так, с точностью до величин второго порядка малости находим:

$$g^{ik} = g^{ik\,(0)} - h^{ik} + h_l^i h^{lk}. \tag{105,3}$$

С той же точностью определитель метрического тензора

$$g = g^{(0)}\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h_k^i h_i^k\right), \tag{105,4}$$

где $h \equiv h_i^i$.

Сразу же подчеркнем, что условие малости h_{ik} отнюдь не фиксирует однозначного выбора системы отсчета. Если это усло-