б) При $L > 0$ (движение в направлении вращения коллапсара) при $a \to r_g/2$ радиус $r_{\min}$ стремится к радиусу горизонта. Положив $a = \frac{r_g}{2}(1+\delta)$, получим при $\delta \to 0$:

$$\frac{r_{\text{гор}}}{r_g} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{2\delta}), \qquad \frac{r_{\min}}{r_g} = \frac{1}{2}[1+(4\delta)^{1/3}].$$

При этом

$$\frac{\mathscr{E}_0}{m} = \frac{L}{mr_g} = \frac{1}{\sqrt{3}}[1+(4\delta)^{1/3}].$$

Обратим внимание на то, что все время остается $r_{\min}/r_{\text{гор}} > 1$, т. е. орбита проходит вне горизонта. Так и должно было быть: горизонт представляет собой нулевую гиперповерхность, в которой не могут лежать времениподобные мировые линии движущихся частиц.

§ 105. Гравитационное поле вдали от тел

Рассмотрим стационарное гравитационное поле на больших расстояниях r от создающего его тела и определим первые члены его разложения по степеням $1/r$.

Вдали от тела поле слабое. Это значит, что метрика пространства-времени здесь почти галилеева, т. е. можно выбрать такую систему отсчета, в которой компоненты метрического тензора почти равны своим галилеевым значениям:

$$g_{00}^{(0)} = 1, \quad g_{0\alpha}^{(0)} = 0, \quad g_{\alpha\beta}^{(0)} = -\delta_{\alpha\beta}. \tag{105,1}$$

Соответственно этому представим g_{ik} в виде

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}, \tag{105,2}$$

где h_{ik} — малые поправки, определяющие гравитационное поле.

Оперируя с тензором h_{ik}, условимся в дальнейшем поднимать и опускать его индексы с помощью «невозмущенной» метрики: $h_i^k = g^{(0)kl}h_{il}$ и т. п. При этом необходимо отличать h^{ik} от поправок в контравариантных компонентах метрического тензора g^{ik}. Последние определяются решением уравнений

$$g_{il}g^{lk} = (g_{il}^{(0)} + h_{il})\,g^{lk} = \delta_i^k;$$

так, с точностью до величин второго порядка малости находим:

$$g^{ik} = g^{ik\,(0)} - h^{ik} + h_l^i h^{lk}. \tag{105,3}$$

С той же точностью определитель метрического тензора

$$g = g^{(0)}\left(1 + h + \frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{2}h_k^i h_i^k\right), \tag{105,4}$$

где $h \equiv h_i^i$.

Сразу же подчеркнем, что условие малости h_{ik} отнюдь не фиксирует однозначного выбора системы отсчета. Если это усло-

вие выполнено в какой-либо одной системе, то оно будет выполнено и после любого преобразования $x'^i = x^i + \xi^i$, где ξ^i — малые величины. Согласно (94,3) тензор h_{ik} переходит при этом в

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}, \tag{105,5}$$

где $\xi_i = g^{(0)}_{ik}\xi^k$ (ввиду постоянства $g^{(0)}_{ik}$ ковариантные производные в (94,3) сводятся в данном случае к обычным производным)[1].

В первом приближении, с точностью до членов порядка $1/r$, малые добавки к галилеевым значениям даются соответствующими членами разложения центрально-симметричной метрики Шварцшильда. В соответствии с отмеченной неопределенностью в выборе (галиеевой на бесконечности) системы отсчета, конкретный вид h_{ik} зависит при этом от способа определения радиальной координаты r. Так, если шварцшильдова метрика представлена в виде (100,14), первые члены ее разложения при больших r даются выражением (100,18). Перейдя в нем от сферических пространственных координат к декартовым (для чего надо заменить $dr = n_\alpha dx^\alpha$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}$), получим следующие значения:

$$h^{(1)}_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r} n_\alpha n_\beta, \quad h^{(1)}_{0\alpha} = 0, \tag{105,6}$$

где $r_g = 2km/c^2$ [2]).

Среди членов второго порядка, пропорциональных $1/r^2$, имеются члены двоякого порисхождения. Часть членов возникает в результате нелинейности уравнений Эйнштейна из членов первого порядка. Поскольку последние зависят только от массы (но не от каких-либо других характеристик) тела, то только от нее же зависят и эти члены второго порядка. Ясно поэтому, что и эти члены можно получить путем разложения шварцшильдовой метрики. В тех же координатах найдем:

$$h^{(2)}_{00} = 0, \quad h^{(2)}_{\alpha\beta} = -\left(\frac{r_g}{r}\right)^2 n_\alpha n_\beta. \tag{105,7}$$

---

[1]) Для стационарного поля естественно допускать лишь преобразования, не нарушающие независимости g_{ik} от времени, т. е. ξ^i должны быть функциями лишь от пространственных координат.

[2]) Если же исходить из метрики Шварцшильда в изотропных пространственных координатах (см. задачу 4 § 100), мы получили бы:

$$h^{(1)}_{00} = -\frac{r_g}{r}, \quad h^{(1)}_{\alpha\beta} = -\frac{r_g}{r}\delta_{\alpha\beta}, \quad h^{(1)}_{0\alpha} = 0. \tag{105,6a}$$

Переход от (105,6) к (105,6а) осуществляется преобразованием (105,5) с

$$\xi^0 = 0, \quad \xi^\alpha = -\frac{r_g x^\alpha}{2r}.$$

Остальные члены второго порядка возникают как соответствующие решения линеаризованных уравнений поля. Имея в виду также и дальнейшие применения, произведем линеаризацию уравнений, выписывая сначала формулы в более общем виде, чем понадобится здесь, — не учитывая сразу стационарности поля.

При малых h_{ik} величины Γ^i_{kl}, выражающиеся через производные от h_{ik}, тоже малы. Пренебрегая степенями выше первой, мы можем оставить в тензоре кривизны (92,1) только члены в первой скобке:

$$R_{iklm}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_{im}}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h_{kl}}{\partial x^i \partial x^m}-\frac{\partial^2 h_{km}}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h_{il}}{\partial x^k \partial x^m}\right). \qquad (105,8)$$

Для тензора Риччи имеем с той же точностью:

$$R_{ik}=g^{lm}R_{limk}\approx g^{lm\,(0)}R_{limk},$$

или

$$R_{ik}=\frac{1}{2}\left(-g^{lm\,(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}+\frac{\partial^2 h^l_i}{\partial x^k \partial x^l}+\frac{\partial^2 h^l_k}{\partial x^i \partial x^l}-\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k}\right). \qquad (105,9)$$

Выражение (105,9) можно упростить, воспользовавшись оставшимся произволом в выборе системы отсчета. Именно, наложим на h_{ik} четыре (по числу произвольных функций ξ^i) дополнительных условия

$$\frac{\partial \psi^k_i}{\partial x^k}=0, \quad \psi^k_i=h^k_i-\frac{1}{2}\delta^k_i h. \qquad (105,10)$$

Тогда последние три члена в (105,9) взаимно сокращаются и остается

$$R_{ik}=-\frac{1}{2}g^{lm\,(0)}\frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^l \partial x^m}. \qquad (105,11)$$

В интересующем нас здесь стационарном случае, когда h_{ik} не зависят от времени, выражение (105,11) сводится к $R_{ik}=$ $=\frac{1}{2}\Delta h_{ik}$, где Δ — оператор Лапласа по трем пространственным координатам. Уравнения же Эйнштейна для поля в пустоте сводятся, таким образом, к уравнениям Лапласа

$$\Delta h_{ik}=0, \qquad (105,12)$$

с дополнительными условиями (105,10), принимающими вид

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(h^\beta_\alpha-\frac{1}{2}h\delta^\beta_\alpha\right)=0, \qquad (105,13)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta}h^\beta_0=0. \qquad (105,14)$$

Обратим внимание на то, что эти условия все еще не фиксируют вполне однозначного выбора системы отсчета. Легко убедиться

в том, что если h_{ik} удовлетворяют условиям (105,13—14), то таким же условиям будут удовлетворять и h'_{ik} (105,5), если только ξ^i удовлетворяют уравнениям

$$\Delta\xi^i = 0. \tag{105,15}$$

Компонента h_{00} должна даваться скалярным решением трехмерного уравнения Лапласа. Такое решение, пропорциональное $1/r^2$, имеет, как известно, вид $\mathbf{a}\nabla\frac{1}{r}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. Но член такого вида в h_{00} всегда может быть ликвидирован путем простого смещения начала координат в члене первого порядка по $1/r$. Таким образом, наличие такого члена свидетельствовало бы лишь о неудачном выборе начала координат и потому не представляет интереса.

Компоненты $h_{0\alpha}$ даются векторным решением уравнения Лапласа, т. е. должны иметь вид

$$h_{0\alpha} = \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r},$$

где $\lambda_{\alpha\beta}$ — постоянный тензор. Условие (105,14) дает

$$\lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{1}{r} = 0,$$

откуда следует, что $\lambda_{\alpha\beta}$ должны иметь вид $a_{\alpha\beta} + \lambda\delta_{\alpha\beta}$, где $a_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор. Но решение вида $\lambda\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{1}{r}$ может быть исключено преобразованием (105,5) с $\xi^0 = \lambda/r$, $\xi^\alpha = 0$ (удовлетворяющими условию (105,15)). Поэтому реальным смыслом обладает лишь решение

$$h_{0\alpha} = a_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r}.$$

Наконец, аналогичными, хотя и более громоздкими рассуждениями можно показать, что надлежащим преобразованием пространственных координат всегда можно исключить величины $h_{\alpha\beta}$, даваемые тензорным (симметричным по α, β) решением уравнения Лапласа.

Что касается тензора $a_{\alpha\beta}$, то он связан с тензором полного момента $M_{\alpha\beta}$, и окончательное выражение для $h_{0\alpha}$ имеет вид

$$h^{(2)}_{0\alpha} = \frac{2k}{c^3}M_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\frac{1}{r} = -\frac{2k}{c^3}M_{\alpha\beta}\frac{n_\beta}{r^2}. \tag{105,16}$$

Покажем это путем вычисления интеграла (96,17).

Момент $M_{\alpha\beta}$ связан только с $h_{0\alpha}$, и потому при вычислении все остальные компоненты h_{ik} можно считать отсутствующими. С точностью до членов первого порядка по $h_{0\alpha}$ имеем из

(96,2—3) (замечаем, что $g^{\alpha 0} = -h^{\alpha 0} = h_{\alpha 0}$, а $-g$ отличается от 1 лишь на величины второго порядка):

$$h^{\alpha 0\beta} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(g^{\alpha 0}g^{\beta\gamma} - g^{\gamma 0}g^{\alpha\beta}) = -\frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\gamma}(h_{\alpha 0}\delta_{\beta\gamma} - h_{\gamma 0}\delta_{\alpha\beta}).$$

При подстановке сюда (105,16) второй член под знаком производной исчезает, а первый дает

$$h^{\alpha 0\beta} = -\frac{c}{8\pi}M_{\alpha\gamma}\frac{\partial^2}{\partial x^\beta \partial x^\gamma}\frac{1}{r} = -\frac{c}{8\pi}M_{\alpha\gamma}\frac{3n_\beta n_\gamma - \delta_{\beta\gamma}}{r^3}.$$

С помощью этого выражения находим, производя интегрирование в (96,17) по поверхности сферы радиуса $r\,(df_\gamma = n_\gamma r^2 do)$:

$$\frac{1}{c}\oint (x^\alpha h^{\beta 0\gamma} - x^\beta h^{\alpha 0\gamma})\,df_\gamma = -\frac{1}{4\pi}\int (n_\alpha n_\gamma M_{\beta\gamma} - n_\beta n_\gamma M_{\alpha\gamma})\,do =$$

$$= -\frac{1}{3}(\delta_{\alpha\gamma}M_{\beta\gamma} - \delta_{\beta\gamma}M_{\alpha\gamma}) = \frac{2}{3}M_{\alpha\beta}.$$

Аналогичное вычисление дает:

$$\frac{1}{c}\oint \lambda^{\alpha 0\gamma\beta}df_\gamma = -\frac{c^3}{16\pi k}\oint (h_{\alpha 0}df_\beta - h_{\beta 0}df_\alpha) = \frac{1}{3}M_{\alpha\beta}.$$

Складывая обе величины, получим требуемое значение $M_{\alpha\beta}$.

Подчеркнем, что в общем случае, когда поле вблизи тела может не быть слабым, $M_{\alpha\beta}$ есть момент импульса тела вместе с гравитационным полем. Лишь если поле слабо на всех расстояниях, его вкладом в момент можно пренебречь [1]).

Формулы (105,6—7) и (105,16) решают поставленный вопрос с точностью до членов порядка $1/r^2$ [2]). Ковариантные компоненты метрического тензора:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}^{(1)} + h_{ik}^{(2)}. \qquad (105,17)$$

При этом, согласно (105,3), контравариантные компоненты с той же точностью равны

$$g^{ik} = g^{ik\,(0)} - h^{ik\,(1)} - h^{ik\,(2)} + h_l^{i\,(1)}h^{lk\,(1)}. \qquad (105,18)$$

---

[1]) Если вращающееся тело имеет сферическую форму, то направление **M** остается единственным выделенным направлением для поля во всем пространстве вне тела. Если при этом поле слабо везде (а не только вдали от тела), то формула (105,16) справедлива во всем пространстве вне тела. Эта формула остается справедливой во всем пространстве и в том случае, когда центрально-симметричная часть поля не является везде слабой, но сферическое тело вращается достаточно медленно — см. задачу 1.

[2]) Преобразования (105,5) с $\xi^0 = 0$, $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^1, x^2, x^3)$ не меняют $h_{0\alpha}$. Поэтому выражение (105,16) не зависит от выбора координаты r.

Формула (105,16) может быть переписана в векторном виде как[1])

$$\mathbf{g} = \frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{nM}], \tag{105,19}$$

где $\mathbf{M}$ — вектор полного момента тела. В задаче 1 § 88 было показано, что в стационарном гравитационном поле на частицу действует «кориолисова сила», такая же, какая действовала бы на частицу в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{c}{2}\sqrt{g_{00}}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{g}.$$

Поэтому можно сказать, что в поле вращающегося тела на удаленную частицу действует кориолисова сила, отвечающая угловой скорости:

$$\mathbf{\Omega} \approx \frac{c}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{g} = \frac{k}{c^2 r^3}[\mathbf{M} - 3\mathbf{n}(\mathbf{Mn})]. \tag{105,20}$$

Наконец, применим выражения (105,6) для вычисления полной энергии гравитирующего тела по интегралу (96,16). Вычислив нужные компоненты h^{ikl} по формуле (96,2—3), получим с требуемой точностью (оставляем члены $\sim 1/r^2$):

$$h^{\alpha 0\beta} = 0,$$

$$h^{00\alpha} = \frac{c^4}{16\pi k}\frac{\partial}{\partial x^\beta}(g^{00}g^{\alpha\beta}) = \frac{mc^2}{8\pi}\frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(-\frac{\delta^{\alpha\beta}}{r} + \frac{x^\alpha x^\beta}{r^3}\right) = \frac{mc^2}{4\pi}\frac{n^\alpha}{r^2}.$$

Интегрируя теперь в (96,16) по сфере радиуса r, получим окончательно:

$$P^\alpha = 0, \quad P^0 = mc \tag{105,21}$$

— результат, который естественно было ожидать. Он является выражением факта равенства, как говорят, «тяжелой» и «инертной» масс («тяжелой» называют массу, определяющую создаваемое телом гравитационное поле, — это та масса, которая входит в метрический тензор в гравитационном поле или, в частности, в закон Ньютона; «инертная» же масса определяет соотношение между импульсом и энергией тела и, в частности, энергия покоя тела равна этой его массе, умноженной на c^2).

В случае постоянного гравитационного поля оказывается возможным вывести простое выражение для полной энергии материи вместе с полем в виде интеграла только по пространству, занятому материей. Получить его можно, например, исходя из

---

[1]) С рассматриваемой точностью вектор $g_\alpha = -g_{0\alpha}/g_{00} \approx -g_{0\alpha}$. По той же причине в определениях векторного произведения и ротора (см. примечание на стр. 327) надо положить $\gamma = 1$, так что их можно понимать в обычном для декартовых векторов смысле.

следующего выражения, справедливого, когда все величины не зависят от x^0 [1]):

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha\right). \qquad (105,22)$$

Интегрируя $R_0^0 \sqrt{-g}$ по (трехмерному) пространству и применив трехмерную теорему Гаусса, получим:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \oint \sqrt{-g}\, g^{i0} \Gamma_{0i}^\alpha df_\alpha.$$

Взяв достаточно удаленную поверхность интегрирования и воспользовавшись на ней выражениями (105,6) для g_{ik}, получим после простого вычисления:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g}\, dV = \frac{4\pi k}{c^2} m = \frac{4\pi k}{c^3} P^0.$$

Замечая также, что, согласно уравнениям поля,

$$R_0^0 = \frac{8\pi k}{c^4} \left(T_0^0 - \frac{1}{2} T\right) = \frac{4\pi k}{c^4} \left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right),$$

получаем искомую формулу:

$$P^0 = mc = \frac{1}{c} \int \left(T_0^0 - T_1^1 - T_2^2 - T_3^3\right) \sqrt{-g}\, dV. \qquad (105,23)$$

Эта формула выражает полную энергию материи и постоянного гравитационного поля (т. е. полную массу тела) через тензор энергии-импульса одной только материи (*R. Tolman*, 1930). Напомним, что в случае центральной симметрии поля мы имели для той же величины еще и другое выражение — формулу (100,23).

Задачи

1. Показать, что формула (105,16) остается справедливой для поля во всем пространстве вне вращающегося сферического тела при условии медленности вращения (момент $M \ll cmr_g$), но без требования слабости центрально-симметричной части поля (*А. Г. Дорошкевич, Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков*, 1965; *В. Гурович*, 1965).

---

[1]) Из (92,7) имеем

$$R_0^0 = g^{0i} R_{i0} = g^{0i} \left(\frac{\partial \Gamma_{i0}^l}{\partial x^l} + \Gamma_{i0}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{0m}^l\right),$$

а с помощью (86,5) и (86,8) находим, что это выражение может быть написано как

$$R_0^0 = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{-g}\, g^{0l} \Gamma_{i0}^l\right) + g^{lm} \Gamma_{ml}^0 \Gamma_{i0}^l;$$

с помощью того же соотношения (86,8) легко убедиться в том, что второй член справа тождественно равен $-\frac{1}{2} \Gamma_{lm}^0 \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^0}$ и вследствие независимости всех величин от x^0 обращается в нуль. Наконец, заменив по той же причине в первом члене суммирование по l суммированием по α, получим (105,22).

Решение. В сферических пространственных координатах ($x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$) формула (105,16) записывается как

$$h_{03} = \frac{2kM}{rc^2} \sin^2\theta. \tag{1}$$

Рассматривая эту величину как малую поправку к шварцшильдовой метрике (100,14), надо проверить выполнение линеаризованного по h_{03} уравнения $R_{03} = 0$ (в остальных уравнениях поля поправочные члены выпадают тождественно). R_{03} можно вычислить по формуле (4) из задачи к § 95, причем линеаризация сводится к тому, что трехмерные тензорные операции должны производиться по «невозмущенной» метрике (100,15). В результате получается уравнение

$$\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)\frac{\partial^2 h_{03}}{\partial r^2} + \frac{2r_g}{r^3} h_{03} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial h_{03}}{\partial\theta}\right) = 0,$$

которому выражение (1) действительно удовлетворяет.

2. Определить систематическое (*вековое*) смещение орбиты частицы, движущейся в поле центрального тела, связанное с вращением последнего (*J. Lense, H. Thirring*, 1918).

Решение. Ввиду малости всех релятивистских эффектов они накладываются друг на друга линейно, и при вычислении эффектов, происходящих от вращения центрального тела, можно пренебречь рассмотренным в § 101 влиянием неньютоновости центрально-симметричного силового поля; другими словами, можно производить вычисления, считая из всех h_{ik} отличными от нуля лишь $h_{0\alpha}$.

Ориентация классической орбиты частицы определяется двумя сохраняющимися векторами: моментом импульса частицы $\mathbf{M} = [\mathbf{rp}]$ и вектором

$$\mathbf{A} = \left[\frac{\mathbf{p}}{m}\mathbf{M}\right] - \frac{kmm'\mathbf{r}}{r},$$

сохранение которого специфично для ньютонова поля $\varphi = -km'/r$ (m' — масса центрального тела, m — масса частицы); см. I § 15. Вектор $\mathbf{M}$ перпендикулярен к плоскости орбиты, а вектор $\mathbf{A}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса в сторону перигелия (и по величине равен $kmm'e$, где e — эксцентриситет орбиты). Искомое вековое смещение орбиты можно описывать как изменение направления этих векторов.

Функция Лагранжа частицы, движущейся в поле (105,19):

$$L = -mc\frac{ds}{dt} = L_0 + \delta L, \qquad \delta L = mc\mathbf{gv} = \frac{2km}{c^2r^3}(\mathbf{M}'[\mathbf{vr}]) \tag{1}$$

(момент центрального тела обозначаем здесь посредством $\mathbf{M}'$ в отличие от момента частицы $\mathbf{M}$). Отсюда функция Гамильтона (ср. I (40,7))

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_0 + \delta\mathscr{H}, \quad \delta\mathscr{H} = \frac{2k}{c^2r^3}(\mathbf{M}'[\mathbf{rp}]).$$

Вычисляя производную $\dot{\mathbf{M}} = [\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] + [\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$ с помощью уравнений Гамильтона $\dot{\mathbf{r}} = \partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{p}$, $\dot{\mathbf{p}} = -\partial\mathscr{H}/\partial\mathbf{r}$, получим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \frac{2k}{c^2r^3}[\mathbf{M}'\mathbf{M}]. \tag{2}$$

Интересуясь вековым ходом изменения $\mathbf{M}$, мы должны усреднить это выражение по периоду T обращения частицы. Усреднение удобно произвести

с помощью параметрического представления зависимости r от времени при движении по эллиптической орбите в виде

$$r = a(1 - e\cos\xi), \qquad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi)$$

(a и e — большая полуось и эксцентриситет эллипса; см. I § 15):

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e\cos\xi)^2} = \frac{1}{a^3(1 - e^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, вековое изменение $\mathbf{M}$ дается формулой

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k[\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2a^3(1 - e^2)^{3/2}}, \tag{3}$$

т. е. вектор $\mathbf{M}$ вращается вокруг оси вращения центрального тела, оставаясь неизменным по величине.

Аналогичное вычисление для вектора $\mathbf{A}$ дает:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2r^3}[\mathbf{M}'\mathbf{A}] + \frac{6k}{c^2mr^5}(\mathbf{M}\mathbf{M}')[\mathbf{r}\mathbf{M}].$$

Усреднение этого выражения производится аналогично тому, как это было сделано выше; при этом из соображений симметрии заранее очевидно, что усредненный вектор $\overline{\mathbf{r}/r^5}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса, т. е. вдоль направления вектора $\mathbf{A}$. Вычисление приводит к следующему выражению для векового изменения вектора $\mathbf{A}$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{A}], \qquad \mathbf{\Omega} = \frac{2kM'}{c^2a^3(1 - e^2)^{3/2}}\{\mathbf{n}' - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{n}')\} \tag{4}$$

($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ — единичные векторы в направлении $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$), т. е. вектор $\mathbf{A}$ вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, оставаясь неизменным по величине; последнее обстоятельство означает, что эксцентриситет орбиты не испытывает векового изменения.

Формулу (3) можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{M}]$$

с тем же $\mathbf{\Omega}$, что и в (4); другими словами, $\mathbf{\Omega}$ есть угловая скорость вращения эллипса «как целого». Это вращение включает в себя как дополнительное (по отношению к рассмотренному в § 101) смещение перигелия орбиты, так и вековое вращение ее плоскости вокруг направления оси тела (последний эффект отсутствует, если плоскость орбиты совпадает с экваториальной плоскостью центрального тела).

Для сравнения укажем, что рассмотренному в § 101 эффекту соответствует

$$\mathbf{\Omega} = \frac{6\pi km'}{c^2a(1 - e^2)T}\mathbf{n}.$$

§ 106. Уравнения движения системы тел во втором приближении

Как мы увидим ниже (§ 110), система движущихся тел излучает гравитационные волны, теряя при этом энергию. Эта потеря, однако, появляется лишь в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырех приближениях энергия системы остается