с помощью параметрического представления зависимости r от времени при движении по эллиптической орбите в виде

$$r = a(1 - e\cos\xi), \qquad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e\sin\xi)$$

(a и e — большая полуось и эксцентриситет эллипса; см. I § 15):

$$\overline{r^{-3}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{dt}{r^3} = \frac{1}{2\pi a^3}\int_0^{2\pi} \frac{d\xi}{(1 - e\cos\xi)^2} = \frac{1}{a^3(1 - e^2)^{3/2}}.$$

Таким образом, вековое изменение $\mathbf{M}$ дается формулой

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{2k[\mathbf{M}'\mathbf{M}]}{c^2a^3(1 - e^2)^{3/2}}, \tag{3}$$

т. е. вектор $\mathbf{M}$ вращается вокруг оси вращения центрального тела, оставаясь неизменным по величине.

Аналогичное вычисление для вектора $\mathbf{A}$ дает:

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{2k}{c^2r^3}[\mathbf{M}'\mathbf{A}] + \frac{6k}{c^2mr^5}(\mathbf{M}\mathbf{M}')[\mathbf{r}\mathbf{M}].$$

Усреднение этого выражения производится аналогично тому, как это было сделано выше; при этом из соображений симметрии заранее очевидно, что усредненный вектор $\overline{\mathbf{r}/r^5}$ направлен вдоль большой полуоси эллипса, т. е. вдоль направления вектора $\mathbf{A}$. Вычисление приводит к следующему выражению для векового изменения вектора $\mathbf{A}$:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{A}], \qquad \mathbf{\Omega} = \frac{2kM'}{c^2a^3(1 - e^2)^{3/2}}\{\mathbf{n}' - 3\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{n}')\} \tag{4}$$

($\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$ — единичные векторы в направлении $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$), т. е. вектор $\mathbf{A}$ вращается с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$, оставаясь неизменным по величине; последнее обстоятельство означает, что эксцентриситет орбиты не испытывает векового изменения.

Формулу (3) можно написать в виде

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\mathbf{\Omega}\mathbf{M}]$$

с тем же $\mathbf{\Omega}$, что и в (4); другими словами, $\mathbf{\Omega}$ есть угловая скорость вращения эллипса «как целого». Это вращение включает в себя как дополнительное (по отношению к рассмотренному в § 101) смещение перигелия орбиты, так и вековое вращение ее плоскости вокруг направления оси тела (последний эффект отсутствует, если плоскость орбиты совпадает с экваториальной плоскостью центрального тела).

Для сравнения укажем, что рассмотренному в § 101 эффекту соответствует

$$\mathbf{\Omega} = \frac{6\pi km'}{c^2a(1 - e^2)T}\mathbf{n}.$$

§ 106. Уравнения движения системы тел во втором приближении

Как мы увидим ниже (§ 110), система движущихся тел излучает гравитационные волны, теряя при этом энергию. Эта потеря, однако, появляется лишь в пятом приближении по $1/c$. В первых же четырех приближениях энергия системы остается

постоянной. Отсюда следует, что система гравитирующих тел может быть описана с помощью функции Лагранжа с точностью до членов порядка $1/c^4$ в отличие от электромагнитного поля, где функция Лагранжа существует, в общем случае, только с точностью до членов второго порядка (§ 65). Мы дадим здесь вывод функции Лагранжа системы тел с точностью до членов второго порядка. Тем самым мы найдем уравнения движения системы в приближении, следующем после ньютоновского.

При этом мы будем пренебрегать размерами и внутренней структурой тел, рассматривая их как «точечные»; другими словами, мы ограничиваемся нулевыми членами разложения по степеням отношений размеров тел a к их взаимным расстояниям l.

Для решения поставленной задачи мы должны начать с определения в соответствующем приближении слабого гравитационного поля, создаваемого телами на расстояниях, больших по сравнению с их размерами, но в то же время малых по сравнению с длиной излучаемых системой гравитационных волн $\lambda (a \ll r \ll \lambda \sim lc/v)$.

С точностью до величин порядка $1/c^2$ поле вдали от тела дается полученными в предыдущем параграфе выражениями, обозначенными там как $h_{ik}^{(1)}$; воспользуемся здесь этими выражениями в форме (105,6а). В § 105 подразумевалось, что поле создается всего одним (находящимся в начале координат) телом. Но поскольку поле $h_{ik}^{(1)}$ представляет собой решение линеаризованных уравнений Эйнштейна, для него справедлив принцип суперпозиции. Поэтому поле вдали от системы тел получится просто суммированием полей каждого из них; напишем его в виде

$$h_\alpha^\beta = -\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta, \tag{106,1}$$

$$h_0^0 = \frac{2}{c^2}\varphi, \quad h_0^\alpha = 0, \tag{106,2}$$

где

$$\varphi(\mathbf{r}) = -k\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}$$

есть ньютонов гравитационный потенциал системы точечных тел ($\mathbf{r}_a$ — радиус-вектор тела с массой m_a). Выражение для интервала с метрическим тензором (106,1—2):

$$ds^2 = \left(1+\frac{2}{c^2}\varphi\right)c^2dt^2 - \left(1-\frac{2}{c^2}\varphi\right)(dx^2+dy^2+dz^2). \tag{106,3}$$

Отметим, что члены первого порядка по φ имеются не только в g_{00}, но и в $g_{\alpha\beta}$; в § 87 было уже указано, что в уравнениях движения частицы поправочные члены в $g_{\alpha\beta}$ приводят к величинам более высоких порядков малости, чем члены, происходящие

от g_{00}; в связи с этим путем сравнения с ньютоновыми уравнениями движения можно было определить только g_{00}.

Как будет видно из дальнейшего, для получения искомых уравнений движения достаточно знать пространственные компоненты $h_{\alpha\beta}$ с полученной в (106,1) точностью ($\sim 1/c^2$); смешанные же компоненты (отсутствующие в приближении $1/c^2$) необходимо иметь с точностью до членов $1/c^3$, а временную h_{00} — с точностью до членов $1/c^4$. Для их вычисления обратимся снова к общим уравнениям тяготения, учтя в них члены соответствующих порядков.

Пренебрегая размерами тел, мы должны писать тензор энергии-импульса вещества в форме (33,4—5). В криволинейных координатах это выражение переписывается как

$$T^{ik} = \sum_a \frac{m_a c}{\sqrt{-g}} \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^k}{dt} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \qquad (106,4)$$

(появление множителя $1/\sqrt{-g}$ — ср. с аналогичным переходом в (90,4)); суммирование производится по всем телам в системе.

Компонента

$$T_{00} = \sum_a \frac{m_a c^3}{\sqrt{-g}} g_{00}^2 \frac{dt}{ds} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$$

в первом приближении (галилеевы g_{ik}) равна $\sum_a m_a c^2 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$; в следующем приближении подставляем g_{ik} из (106,3) и после простого вычисления получаем:

$$T_{00} = \sum_a m_a c^2 \left(1 + \frac{5\varphi_a}{c^2} + \frac{v_a^2}{2c^2}\right) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \qquad (106,5)$$

где $\mathbf{v}$ — обычная трехмерная скорость ($v^\alpha = dx^\alpha/dt$), а φ_a — потенциал поля в точке $\mathbf{r}_a$ (на наличие в φ_a бесконечной части — потенциала собственного поля частицы m_a — пока не обращаем внимания; о нем см. ниже).

Что касается компонент $T_{\alpha\beta}$, $T_{0\alpha}$ тензора энергии-импульса, то для них, в том же приближении, достаточно оставить лишь первые члены разложения выражений (106,4):

$$T_{\alpha\beta} = \sum_a m_a v_{a\alpha} v_{a\beta} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a), \quad T_{0\alpha} = -\sum_a m_a c v_{a\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \qquad (106,6)$$

Далее переходим к вычислению компонент тензора R_{ik}. Вычисление удобно производить по формуле $R_{ik} = g^{lm} R_{ilmk}$ с R_{ilmk} из (92,1). При этом надо помнить, что величины $h_{\alpha\beta}$, h_{00} содержат члены порядка не ниже $1/c^2$, а $h_{0\alpha}$ — не ниже $1/c^3$; дифференцирования по $x^0 = ct$ в свою очередь повышают порядок малости на 1.

Главные члены в R_{00} порядка $1/c^2$; наряду с ними мы должны сохранить также и члены следующего неисчезающего порядка — $1/c^4$. Простое вычисление приводит к результату:

$$R_{00}=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha}-\frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}\right)+\frac{1}{2}\Delta h_{00}+\frac{1}{2}h^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 h_{00}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}-$$
$$-\frac{1}{4}\left(\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\alpha}\right)^2-\frac{1}{4}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}\left(2\frac{\partial h_\beta^\alpha}{\partial x^\alpha}-\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial x^\beta}\right).$$

В этом вычислении не было еще использовано никакого дополнительного условия для величин h_{ik}. Пользуясь этой свободой, наложим теперь на них условие

$$\frac{\partial h_0^\alpha}{\partial x^\alpha}-\frac{1}{2c}\frac{\partial h_\alpha^\alpha}{\partial t}=0, \tag{106,7}$$

в результате которого из R_{00} полностью выпадают члены, содержащие компоненты $h_{0\alpha}$. В остальных членах подставляем

$$h_\alpha^\beta=-\frac{2}{c^2}\varphi\delta_\alpha^\beta,\quad h_{00}=\frac{2}{c^2}\varphi+O\left(\frac{1}{c^4}\right)$$

и получаем, с требуемой точностью:

$$R_{00}=\frac{1}{2}\Delta h_{00}+\frac{2}{c^4}\varphi\Delta\varphi-\frac{2}{c^4}(\nabla\varphi)^2, \tag{106,8}$$

где мы перешли к трехмерным обозначениям.

При вычислении компонент $R_{0\alpha}$ достаточно сохранить лишь члены первого неисчезающего порядка — $1/c^3$. Аналогичным образом получим:

$$R_{0\alpha}=\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\alpha^\beta}{\partial t\,\partial x^\beta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0^\beta}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}-\frac{1}{2c}\frac{\partial^2 h_\beta^\beta}{\partial t\,\partial x^\alpha}+\frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}$$

и затем, с учетом условия (106,7):

$$R_{0\alpha}=\frac{1}{2}\Delta h_{0\alpha}+\frac{1}{2c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x^\alpha}. \tag{106,9}$$

С помощью полученных выражений (106,5—9) составим теперь уравнения Эйнштейна:

$$R_{ik}=\frac{8\pi k}{c^4}\left(T_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}T\right). \tag{106,10}$$

Временная компонента уравнения (106,10) дает:

$$\Delta h_{00}+\frac{4}{c^4}\varphi\Delta\varphi-\frac{4}{c^4}(\nabla\varphi)^2=\frac{8\pi k}{c^4}\sum_a m_a c^2\left(1+\frac{5\varphi_a}{c^2}+\frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a);$$

с помощью тождества

$$4(\nabla\varphi)^2=2\Delta(\varphi^2)-4\varphi\Delta\varphi$$

и уравнения ньютоновского потенциала

$$\Delta\varphi = 4\pi k \sum_a m_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \tag{106,11}$$

переписываем это уравнение в виде

$$\Delta\left(h_{00} - \frac{2}{c^4}\varphi^2\right) = \frac{8\pi k}{c^2}\sum_a m_a\left(1 + \frac{\varphi_a'}{c^2} + \frac{3v_a^2}{2c^2}\right)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a). \tag{106,12}$$

После проведения всех вычислений мы заменили в правой стороне уравнения (106,12) φ_a на

$$\varphi_a' = -k\sum_b{}' \frac{m_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|},$$

т. е. на потенциал в точке $\mathbf{r}_a$ поля, создаваемого всеми телами, за исключением тела m_a; исключение бесконечного собственного потенциала тел (в используемом нами методе, рассматривающем тела как точечные) соответствует «перенормировке» их масс, в результате которой они принимают свои истинные значения, учитывающие создаваемые самими телами поля[1]).

Решение уравнения (106,12) может быть написано сразу, учитывая известное соотношение (36,9)

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\delta(\mathbf{r}).$$

Таким образом, найдем:

$$h_{00} = \frac{2\varphi}{c^2} + \frac{2\varphi^2}{c^4} - \frac{2k}{c^4}\sum_a \frac{m_a\varphi_a'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{3k}{c^4}\sum_a \frac{m_a v_a^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|}. \tag{106,13}$$

Смешанная компонента уравнения (106,10) дает:

$$\Delta h_{0\alpha} = -\frac{16\pi k}{c^3}\sum_a m_a v_{a\alpha}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x^\alpha}. \tag{106,14}$$

Решение этого линейного уравнения есть[2])

$$h_{0\alpha} = \frac{4k}{c^3}\sum_a \frac{m_a v_{a\alpha}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} - \frac{1}{c^3}\frac{\partial^2 f}{\partial t\,\partial x^\alpha},$$

---

[1]) Действительно, если имеется всего одно неподвижное тело, в правой части уравнения будет стоять просто $(8\pi k/c^2)m_a\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a)$, и это уравнение правильно (во втором приближении) определит создаваемое телом поле.

[2]) В стационарном случае второй член в правой части уравнения (106,14) отсутствует. На больших расстояниях от системы его решение может быть написано непосредственно по аналогии с решением (44,3) уравнения (43,4):

$$h_{0\alpha} = -\frac{2k}{c^3 r^2}[\mathbf{n}\mathbf{M}]_\alpha$$

$\left(\text{где } \mathbf{M} = \int [\mathbf{r}\cdot\mu\mathbf{v}]\,dV = \sum m_a[\mathbf{r}_a\mathbf{v}_a] \text{ — момент импульса системы}\right)$, в соответствии с формулой (105,19).

где f — решение вспомогательного уравнения

$$\Delta f = \varphi = -\sum \frac{km_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}.$$

Учитывая соотношение $\Delta r = 2/r$, находим:

$$f = -\frac{k}{2}\sum_a m_a |\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|,$$

и затем, после простого вычисления, окончательно получаем:

$$h_{0\alpha} = \frac{k}{2c^3}\sum_a \frac{m_a}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_a|}[7v_{a\alpha} + (\mathbf{v}_a\mathbf{n}_a)\,n_{a\alpha}], \qquad (106,15)$$

где $\mathbf{n}_a$ — единичный вектор в направлении вектора $\mathbf{r}-\mathbf{r}_a$.

Выражения (106,1), (106,13), (106,15) достаточны для вычисления искомой функции Лагранжа с точностью до членов второго порядка.

Функция Лагранжа одного тела в гравитационном поле, создаваемом другими телами и рассматриваемом как заданное:

$$L_a = -m_a c\frac{ds}{dt} = -m_a c^2\left(1 + h_{00} + 2h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} - \frac{v_a^2}{c^2} + h_{\alpha\beta}\frac{v_a^\alpha v_a^\beta}{c^2}\right)^{1/2}.$$

Разлагая радикал и опустив несущественную постоянную $-m_a c^2$, переписываем это выражение с требуемой точностью как

$$L_a = \frac{m_a v_a^2}{2} + \frac{m_a v_a^4}{8c^2} -$$

$$- m_a c^2\left(\frac{h_{00}}{2} + h_{0\alpha}\frac{v_a^\alpha}{c} + \frac{1}{2c^2}h_{\alpha\beta}v_a^\alpha v_a^\beta - \frac{h_{00}^2}{8} + \frac{h_{00}}{4c^2}v_a^2\right). \qquad (106,16)$$

Значения всех h_{ik} здесь берутся в точке $\mathbf{r}_a$; при этом снова должны быть опущены обращающиеся в бесконечность члены, что сводится к «перенормировке» массы m_a, стоящей в виде коэффициента в L_a.

Дальнейший ход вычислений состоит в следующем. Полная функция Лагранжа L системы, разумеется, не равна сумме функций L_a для отдельных тел, но она должна быть составлена так, чтобы приводить к правильным значениям сил $\mathbf{f}_a$, действующих на каждое из тел при заданном движении остальных. Для этого вычисляем силы $\mathbf{f}_a$ путем дифференцирования функции Лагранжа L_a:

$$\mathbf{f}_a = \left(\frac{\partial L_a}{\partial \mathbf{r}}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_a}$$

(дифференцирование производится по бегущим координатам $\mathbf{r}$ точки наблюдения в выражениях для h_{ik}). После этого легко составить такую общую функцию L, из которой все те же силы $\mathbf{f}_a$ получаются взятием частных производных $\partial L/\partial \mathbf{r}_a$.

Не останавливаясь на простых промежуточных вычислениях, приведем сразу окончательный результат для функции Лагранжа[1]):

$$L=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}+\sum_a\sum_b{}' \frac{3km_a m_b v_a^2}{2c^2 r_{ab}}+\sum_a \frac{m_a v_a^4}{8c^2}+\sum_a\sum_b{}' \frac{km_a m_b}{2r_{ab}}-$$
$$-\sum_a\sum_b{}' \frac{km_a m_b}{4c^2 r_{ab}}\left[7(\mathbf{v}_a\mathbf{v}_b)+(\mathbf{v}_a\mathbf{n}_{ab})(\mathbf{v}_b\mathbf{n}_{ab})\right]-$$
$$-\sum_a\sum_b{}'\sum_c{}' \frac{k^2 m_a m_b m_c}{2c^2 r_{ab} r_{ac}}, \qquad (106,17)$$

где $r_{ab}=|\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b|$, $\mathbf{n}_{ab}$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{r}_a-\mathbf{r}_b$, а штрих у знака суммы означает, что должен быть опущен член с $b=a$ или $c=a$.

Задачи

1. Определить действие для гравитационного поля в ньютоновском приближении.

Решение. С помощью g_{ik} из (106,3) по формуле (93,3) находим $G=2(\nabla\varphi)^2/c^4$, так что действие для поля

$$S_g=-\frac{1}{8\pi k}\iint(\nabla\varphi)^2\,dV\,dt.$$

Полное действие для поля вместе с массами, распределенными в пространстве с плотностью μ:

$$S=\iint\left[\frac{\mu v^2}{2}-\mu\varphi-\frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right]dV\,dt. \qquad (1)$$

Легко убедиться в том, что варьирование S по φ приводит, как и следовало, к уравнению Пуассона (99,2).

Плотность энергии находится из плотности функции Лагранжа Λ (подынтегральное выражение в (1)) согласно общей формуле (32,5), что сводится в данном случае (в силу отсутствия в Λ производных от φ по времени) к изменению знака второго и третьего членов. Интегрируя плотность энергии по пространству, подставив при этом во втором члене $\mu\varphi=\varphi\Delta\varphi/4\pi k$ и интегрируя его по частям, получим окончательно полную энергию поля и материи в виде

$$\int\left[\frac{\mu v^2}{2}-\frac{1}{8\pi k}(\nabla\varphi)^2\right]dV.$$

Следовательно, плотность энергии гравитационного поля в ньютоновской теории есть $W=-(\nabla\varphi)^2/8\pi k$[2]).

---

[1]) Уравнения движения, соответствующие этой функции Лагранжа, были впервые получены *Эйнштейном, Инфельдом* и *Гоффманом* (*A. Einstein, L. Infeld, B. Hoffman*, 1938) и *Эддингтоном* и *Кларком* (*A. Eddington, G. Clark*, 1938).

[2]) Для устранения возможных недоразумений укажем, что это выражение не совпадает с компонентой $(-g)t_{00}$ псевдотензора энергии-импульса (вычисленной с g_{ik} из (106,3)); вклад в W возникает также и из $(-g)T_{ik}$.

2. Определить координаты центра инерции системы гравитирующих тел во втором приближении.

Решение. Ввиду полной формальной аналогии между законом Ньютона для гравитационного взаимодействия и законом Кулона для электростатического взаимодействия координаты центра инерции даются формулой

$$\mathbf{R}=\frac{1}{\mathscr{E}}\sum_a \mathbf{r}_a\left(m_a c^2+\frac{p_a^2}{2m_a}-\frac{km_a}{2}\sum_b{}'\frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

$$\mathscr{E}=\sum_a\left(m_a c^2+\frac{p_a^2}{2m_a}-\frac{km_a}{2}\sum_b{}'\frac{m_b}{r_{ab}}\right),$$

аналогичной формуле, полученной в задаче 1 § 65.

3. Определить вековое смещение перигелия орбиты двух гравитирующих тел сравнимой массы (*H. Robertson*, 1938).

Решение. Функция Лагранжа системы двух тел

$$L=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}+\frac{km_1m_2}{r}+\frac{1}{8c^2}\left(m_1v_1^4+m_2v_2^4\right)+$$
$$+\frac{km_1m_2}{2c^2r}\left[3\left(v_1^2+v_2^2\right)-7\left(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\right)-\left(\mathbf{v}_1\mathbf{n}\right)\left(\mathbf{v}_2\mathbf{n}\right)\right]-\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}.$$

Переходя к функции Гамильтона и исключая из нее движение центра инерции (ср. задачу 2 § 65), получим:

$$\mathscr{H}=\frac{p^2}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)-\frac{km_1m_2}{r}-\frac{p^4}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}\left[3p^2\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7p^2+(\mathbf{pn})^2\right]+\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{p}$ — импульс относительного движения.

Определим радиальную составляющую импульса p_r как функцию переменной r и параметров M (момент импульса) и $\mathscr{E}$ (энергия). Эта функция определяется из уравнения $\mathscr{H}=\mathscr{E}$ (при этом в членах второго порядка надо заменить p^2 его выражением из нулевого приближения):

$$\mathscr{E}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)\left(p_r^2+\frac{M^2}{r^2}\right)-\frac{km_1m_2}{r}-$$
$$-\frac{1}{8c^2}\left(\frac{1}{m_1^3}+\frac{1}{m_2^3}\right)\left(\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\right)^2\left(\mathscr{E}+\frac{km_1m_2}{r}\right)^2-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}\left[3\left(\frac{m_2}{m_1}+\frac{m_1}{m_2}\right)+7\right]\frac{2m_1m_2}{m_1+m_2}\left(\mathscr{E}+\frac{km_1m_2}{r}\right)-$$
$$-\frac{k}{2c^2r}p_r^2+\frac{k^2m_1m_2(m_1+m_2)}{2c^2r^2}.$$

Дальнейший ход вычислений аналогичен произведенным в § 101. Определив из написанного алгебраического уравнения p_r, производим в интеграле

$$S_r=\int p_r\,dr$$

преобразование переменной r так, чтобы привести член, содержащий M^2, к виду M^2/r^2. Произведя затем в подкоренном выражении разложение по

малым релятивистским поправкам, получим:

$$S_r = \int \sqrt{A + \frac{B}{r} - \left(M^2 - \frac{6k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2}\right)\frac{1}{r^2}}\, dr$$

(ср. (101,6)), где A, B — постоянные коэффициенты, в явном вычислении которых нет необходимости.

В результате для смещения перигелия орбиты относительного движения получим:

$$\delta\varphi = \frac{6\pi k^2 m_1^2 m_2^2}{c^2 M^2} = \frac{6\pi k\left(m_1 + m_2\right)}{c^2 a\left(1 - e^2\right)}.$$

Сравнивая с (101,7), мы видим, что при заданных размерах и форме орбиты смещение перигелия такое же, каким оно было бы при движении одного тела в поле неподвижного центра с массой $m_1 + m_2$.

4. Определить частоту прецессии шарового волчка, совершающего орбитальное движение в гравитационном поле вращающегося вокруг своей оси центрального тела.

Решение. В первом приближении искомый эффект представляется суммой двух независимых частей, одна из которых связана с неньютоновостью центрально-симметричного поля (*H. Weyl*, 1923), а другая — с вращением центрального тела (*L. Schiff*, 1960).

Первая часть описывается дополнительным членов в функции Лагранжа волчка, соответствующим второму члену в (106,17). Представим скорость отдельных элементов волчка (с массами dm) в виде $\mathbf{v} = \mathbf{V} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, где $\mathbf{V}$ — скорость его орбитального движения, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элемента dm относительно центра инерции волчка $\left(\text{так что интеграл по объему волчка } \int \mathbf{r}\, dm = 0\right)$. Опустив члены, не зависящие от $\boldsymbol{\omega}$, а также пренебрегая квадратичными по $\boldsymbol{\omega}$ членами, имеем:

$$\delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2}\int \frac{2\left(\mathbf{V}\left[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}\right]\right)}{R}\, dm,$$

где m' — масса центрального тела, $R = |\mathbf{R}_0 + \mathbf{r}|$ — расстояние от центра поля до элемента dm, $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор центра инерции волчка. При разложении $1/R \approx 1/R_0 - \mathbf{n}\mathbf{r}/R_0^2$ (где $\mathbf{n} = \mathbf{R}_0/R_0$) интеграл от первого члена обращается в нуль, а во втором интегрирование производится с помощью формулы

$$\int x_\alpha x_\beta\, dm = \frac{1}{2} I \delta_{\alpha\beta},$$

где I — момент инерции волчка. В результате получим:

$$\delta^{(1)}L = \frac{3km'}{2c^2 R_0^2}\left(\mathbf{M}\left[\mathbf{v}_0\mathbf{n}\right]\right),$$

где $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\omega}$ — вращательный момент волчка.

Дополнительный член в функции Лагранжа, обязанный вращению центрального тела, можно было бы также найти из (106,17), но еще проще вычислить его с помощью формулы (1) из задачи 2 к § 105:

$$\delta^{(2)}L = \frac{2k}{c^2}\int \frac{\mathbf{M}'\left[\left[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}\right]\mathbf{R}\right]}{R^3}\, dm,$$

где $\mathbf{M}'$ — момент центрального тела. Разложив

$$\frac{\mathbf{R}}{R^3} \approx \frac{\mathbf{n}}{R_0^2} + \frac{1}{R_0^3}(\mathbf{r} - 3\mathbf{n}(\mathbf{nr}))$$

и произведя интегрирование, получим:

$$\delta^{(2)}L = \frac{k}{c^2 R_0^3}\{\mathbf{MM}' - 3(\mathbf{nM})(\mathbf{nM}')\}.$$

Таким образом, полная добавка к функции Лагранжа

$$\delta L = -\mathbf{M}\boldsymbol{\Omega}, \qquad \boldsymbol{\Omega} = \frac{3km'}{2c^2 R_0^2}[\mathbf{nv}_0] + \frac{k}{c^2 R_0^3}\{3\mathbf{n}(\mathbf{nM}') - \mathbf{M}'\}.$$

Этой функции отвечает уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{M}]$$

(ср. уравнение (2) из задачи 2 к § 105). Это значит, что момент волчка $\mathbf{M}$ прецессирует с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, оставаясь постоянным по своей величине.