ГЛАВА XII

ПОЛЕ ТЯГОТЕЮЩИХ ТЕЛ

§ 99. Закон Ньютона

Произведем в уравнениях Эйнштейна предельный переход к нерелятивистской механике. Как было указано в § 87, предположение о малости скоростей всех частиц требует одновременно, чтобы само гравитационное поле было слабым.

Выражение для компоненты g_{00} метрического тензора (единственной, которая нам понадобится) в рассматриваемом предельном случае было найдено в § 87:

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}.$$

Далее, для компонент тензора энергии-импульса мы можем воспользоваться выражением (35,4) $T_i^k = \mu c^2 u_i u^k$, где μ — плотность массы тела (сумма масс покоя частиц в единице объема; индекс 0 у μ для краткости опускаем). Что касается 4-скорости u^i, то поскольку макроскопическое движение тоже, конечно, считается медленным, то мы должны пренебречь всеми ее пространственными компонентами, оставив только временную, т. е. должны положить $u^\alpha = 0$, $u^0 = u_0 = 1$. Из всех компонент T_i^k остается, таким образом, только

$$T_0^0 = \mu c^2. \tag{99,1}$$

Скаляр $T = T_i^i$ будет равен той же величине μc^2.

Уравнения Эйнштейна напишем в форме (95,8):

$$R_i^k = \frac{8\pi k}{c^4}\left(T_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k T\right);$$

при $i = k = 0$

$$R_0^0 = \frac{4\pi k}{c^2}\mu.$$

При вычислении R_0^0 по общей формуле (92,7) замечаем, что члены, содержащие произведения величин Γ_{kl}^i, во всяком случае являются величинами второго порядка малости. Члены же, содержащие производные по $x^0 = ct$, являются малыми (по сравнению с членами с производными по координатам x^α), как

содержащие лишние степени от $1/c$. В результате остается $R_0^0 = R_{00} = \partial\Gamma_{00}^\alpha/\partial x^\alpha$. Подставляя

$$\Gamma_{00}^\alpha \approx -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\beta} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha},$$

находим:

$$R_0^0 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{\alpha 2}} \equiv \frac{1}{c^2} \Delta\varphi.$$

Таким образом, уравнения Эйнштейна дают:

$$\Delta\varphi = 4\pi k\mu. \tag{99,2}$$

Это и есть уравнение гравитационного поля в нерелятивистской механике. По своей форме оно полностью аналогично уравнению Пуассона (36,4) для электрического потенциала, в котором теперь вместо плотности заряда стоит плотность массы, умноженная на $-k$. Поэтому мы можем сразу написать общее решение уравнения (99,2) по аналогии с (36,8) в виде

$$\varphi = -k \int \frac{\mu dV}{R}. \tag{99,3}$$

Эта формула определяет в нерелятивистском приближении потенциал гравитационного поля любого распределения масс.

В частности, для потенциала поля одной частицы с массой m имеем:

$$\varphi = -\frac{km}{R}, \tag{99,4}$$

и, следовательно, сила $F = -m' \frac{\partial\varphi}{\partial R}$, действующая в этом поле на другую частицу (массы m'), равна

$$F = -\frac{kmm'}{R^2}. \tag{99,5}$$

Это — известный *закон тяготения Ньютона*.

Потенциальная энергия частицы в гравитационном поле равна ее массе, умноженной на потенциал поля, аналогично тому, что потенциальная энергия в электрическом поле равна произведению заряда на потенциал этого поля. Поэтому мы можем написать по аналогии с (37,1) для потенциальной энергии любого распределения масс выражение

$$U = \frac{1}{2} \int \mu\varphi\, dV. \tag{99,6}$$

Для ньютоновского потенциала постоянного гравитационного поля вдали от создающих его масс можно написать разложение, аналогичное тому, которое было получено в §§ 40—41 для электростатического поля. Выберем начало координат в центре

инерции масс. Тогда интеграл $\int \mu \mathbf{r}\, dV$, аналогичный дипольному моменту системы зарядов, тождественно обратится в нуль. Таким образом, в отличие от электрического поля, в гравитационном поле всегда можно исключить «дипольный член». Разложение потенциала φ имеет, следовательно, вид

$$\varphi = -k\left(\frac{M}{R_0} + \frac{1}{6} D_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta} \frac{1}{R_0} + \ldots\right), \tag{99,7}$$

где $M = \int \mu\, dV$ — полная масса системы, а величины

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu\,(3x_\alpha x_\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, dV \tag{99,8}$$

можно назвать *тензором квадрупольного момента* масс[1]. Он связан с обычным тензором моментов инерции

$$J_{\alpha\beta} = \int \mu\,(r^2\delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)\, dV$$

очевидными соотношениями

$$D_{\alpha\beta} = J_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - 3J_{\alpha\beta}. \tag{99,9}$$

Определение ньютоновского потенциала по заданному распределению масс составляет предмет одного из разделов математической физики; изложение соответствующих методов не входит в задачу этой книги. Мы приведем здесь для справочных целей лишь формулы для потенциала гравитационного поля, создаваемого однородным эллипсоидальным телом.

Пусть поверхность эллипсоида задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad a > b > c. \tag{99,10}$$

Тогда потенциал поля в произвольной точке x, y, z вне тела дается следующей формулой:

$$\varphi = -\pi\mu\, abck \int_\xi^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right) \frac{ds}{R_s}, \tag{99,11}$$

$$R_s = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

где ξ — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1. \tag{99,12}$$

---

[1]) Мы пишем здесь все индексы α, β внизу, не делая различия между ко- и контравариантными компонентами, соответственно тому, что подразумеваются операции в обычном ньютоновском (евклидовом) пространстве.

Потенциал поля внутри эллипсоида определяется формулой

$$\varphi = -\pi\mu abck\int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right)\frac{ds}{R_s}, \qquad (99,13)$$

отличающейся от (99,11) заменой нижнего предела нулем; отметим, что это выражение является квадратичной функцией координат x, y, z.

Гравитационная энергия тела получается, согласно (99,6), интегрированием выражения (99,13) по объему эллипсоида. Оно производится элементарно[1]) и дает:

$$U = \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{1}{5}\left(\frac{a^2}{a^2+s} + \frac{b^2}{b^2+s} + \frac{c^2}{c^2+s}\right) - 1\right]\frac{ds}{R_s} =$$

$$= \frac{3km^2}{8}\int_0^\infty \left[\frac{2}{5}\, s d\left(\frac{1}{R_s}\right) - \frac{2}{5}\frac{ds}{R_s}\right]$$

$\left(m = \frac{4\pi}{3}abc\mu\right.$ — полная масса тела$\left.\right)$; интегрируя первый член по частям, окончательно получим:

$$U = -\frac{3km^2}{10}\int_0^\infty \frac{ds}{R_s}. \qquad (99,14)$$

Все интегралы, входящие в формулы (99,11—14), приводятся к эллиптическим интегралам первого и второго рода. Для эллипсоидов вращения эти интегралы выражаются через элементарные функции. В частности, гравитационная энергия сплюснутого эллипсоида вращения $(a = b > c)$:

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}}\arccos\frac{c}{a}, \qquad (99,15)$$

а для вытянутого эллипсоида вращения $(a > b = c)$:

$$U = -\frac{3km^2}{5\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{Arch}\frac{a}{c}. \qquad (99,16)$$

Для шара $(a = c)$ обе формулы дают значение $U = -3km^2/5a$, которое, разумеется, можно получить и элементарным путем[2]).

---

[1]) Интегрирование квадратов x^2, y^2, z^2 проще всего производится путем подстановки $x = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$, сводящей интеграл по объему эллипсоида к интегралу по объему шара единичного радиуса.

[2]) Потенциал поля внутри однородного шара радиуса a:

$$\varphi = -2\pi k\mu\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right).$$

Задача

Определить равновесную форму равномерно вращающейся как целое однородной гравитирующей массы жидкости.

Решение. Условие равновесия заключается в условии постоянства вдоль поверхности тела суммы гравитационного потенциала и потенциала центробежных сил:

$$\varphi - \frac{\Omega^2}{2}(x^2+y^2) = \text{const}$$

(Ω — угловая скорость вращения; ось вращения — ось z). Искомая форма представляет собой сплюснутый эллипсоид вращения. Для определения его параметров подставляем (99,13) в условие равновесия и исключаем z^2 с помощью уравнения (99,10); это дает:

$$(x^2+y^2)\left[\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)^2\sqrt{c^2+s}} - \frac{\Omega^2}{2\pi\mu k a^2 c} - \right.$$

$$\left. - \frac{c^2}{a^2}\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)(c^2+s)^{3/2}}\right] = \text{const},$$

откуда следует, что выражение в квадратных скобках должно обращаться в нуль. Произведя интегрирование, получим в результате уравнение:

$$\frac{(a^2+2c^2)}{(a^2-c^2)^{3/2}}\arccos\frac{c}{a} - \frac{3c^2}{a^2-c^2} = \frac{\Omega^2}{2\pi k\mu} = \frac{25}{6}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3}\frac{M^2\mu^{1/3}}{m^{10/3}k}\left(\frac{c}{a}\right)^{4/3}$$

$\left(M = \frac{2}{5}ma^2\Omega\right.$ — момент импульса тела относительно оси $\left.z\right)$, определяющее отношение полуосей c/a по заданному Ω или M. Зависимость отношения c/a от M — однозначная; c/a монотонно убывает с увеличением M.

Оказывается, однако, что найденная симметричная форма устойчива (по отношению к малым возмущениям) лишь при не слишком больших значениях M. Именно, она теряет устойчивость при $M = 0{,}24k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (причем $c/a = 0{,}58$). При дальнейшем увеличении M равновесной становится форма трехосного эллипсоида с постепенно убывающими (соответственно от 1 и от 0,58) значениями b/a и c/a. Эта форма в свою очередь становится неустойчивой при $M = 0{,}31k^{1/2}m^{5/3}\mu^{-1/6}$ (причем $a:b:c = 1:0{,}43:0{,}34$) [1]).

§ 100. Центрально-симметричное гравитационное поле

Рассмотрим гравитационное поле, обладающее центральной симметрией. Такое поле может создаваться любым центрально-симметричным распределением вещества; при этом, конечно, центрально-симметричным должно быть не только распределение, но и движение вещества, т. е. скорость в каждой точке должна быть направлена по радиусу.

Центральная симметрия поля означает, что метрика пространства-времени, т. е. выражение для интервала ds, должна быть одинакова во всех точках, находящихся на одинаковом

[1]) Указания по литературе, посвященной этим вопросам, можно найти в книге: *Г. Ламб*, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947, гл. XII.