ГЛАВА XIII

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

§ 107. Слабые гравитационные волны

Конечность скорости распространения взаимодействий приводит в релятивистской теории тяготения, как и в электродинамике, к возможности существования не связанного с телами свободного гравитационного поля — гравитационных волн.

Рассмотрим слабое свободное гравитационное поле в пустоте. Как и в § 105, введем тензор h_{ik}, описывающий слабое возмущение галилеевой метрики:

$$g_{ik} = g_{ik}^{(0)} + h_{ik}. \tag{107,1}$$

При этом с точностью до величин первого порядка по h_{ik} контравариантный метрический тензор:

$$g^{ik} = g^{ik\,(0)} - h^{ik}, \tag{107,2}$$

а определитель тензора g_{ik}:

$$g = g^{(0)}(1 + h), \tag{107,3}$$

где $h \equiv h_i^i$; все операции поднимания и опускания тензорных индексов производятся по невозмущенной метрике $g_{ik}^{(0)}$.

Как было уже указано в § 105, условие малости h_{ik} оставляет возможность произвольных преобразований системы отсчета вида $x'^i = x^i + \xi^i$ с малыми ξ^i; при этом

$$h'_{ik} = h_{ik} - \frac{\partial \xi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi_k}{\partial x^i}. \tag{107,4}$$

Воспользовавшись этим произволом в калибровке (как говорят в этой связи) тензора h_{ik}, налагаем на него дополнительное условие

$$\frac{\partial \psi_i^k}{\partial x^k} = 0, \quad \psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h, \tag{107,5}$$

после чего тензор Риччи принимает простой вид (105,11):

$$R_{ik} = \frac{1}{2}\Box h_{ik}, \tag{107,6}$$

где $\Box$ обозначает оператор д'Аламбера:

$$\Box = -g^{lm\,(0)}\frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^m} = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}.$$

Условия (107,5) все еще не фиксируют однозначного выбора системы отсчета: если некоторые h_{ik} удовлетворяют этим условиям, то им же будут удовлетворять и h_{ik} (107,4), если только ξ^i являются решениями уравнения

$$\Box\, \xi^i = 0. \tag{107,7}$$

Приравняв выражение (107,6) нулю, найдем, таким образом, уравнения гравитационного поля в пустоте в виде

$$\Box\, h_i^k = 0. \tag{107,8}$$

Это — обычное волновое уравнение. Следовательно, гравитационные поля, как и электромагнитные, распространяются в пустоте со скоростью света.

Рассмотрим плоскую гравитационную волну. В такой волне поле меняется только вдоль одного направления в пространстве; в качестве этого направления выберем ось $x^1 = x$. Уравнения (107,8) тогда превращаются в

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) h_i^k = 0, \tag{107,9}$$

решением которых является любая функция от $t \pm x/c$ (§ 47).

Пусть волна распространяется в положительном направлении оси x. Все величины h_i^k в ней являются функциями от $t - x/c$. Дополнительные условия (107,5) дают в этом случае $\dot{\psi}_i^1 - \dot{\psi}_i^0 = 0$, где точка над буквой означает дифференцирование по t. Эти равенства можно проинтегрировать, просто вычеркнув знак дифференцирования; постоянные интегрирования можно положить равными нулю, так как мы интересуемся здесь (как и в случае электромагнитных волн) только переменной частью поля. Таким образом, между отдельными компонентами ψ_i^k имеются соотношения:

$$\psi_1^1 = \psi_1^0,\quad \psi_2^1 = \psi_2^0,\quad \psi_3^1 = \psi_3^0,\quad \psi_0^1 = \psi_0^0. \tag{107,10}$$

Как было указано, условия (107,5) еще не определяют однозначно системы отсчета; мы можем подвергнуть координаты преобразованию вида $x'^i = x^i + \xi^i(t - x/c)$. Этим преобразованием можно воспользоваться для того, чтобы обратить в нуль четыре величины: ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0, $\psi_2^2 + \psi_3^3$. Из равенств (107,10), следует, что при этом обратятся в нуль также и компоненты ψ_1^1, ψ_2^1, ψ_3^1, ψ_0^0. Что же касается остающихся величин ψ_2^3, $\psi_2^2 - \psi_3^3$, то их нельзя обратить в нуль никаким выбором системы отсчета, поскольку при преобразовании (107,4) с $\xi_i = \xi_i(t - x/c)$ эти компоненты вообще не меняются. Заметим, что обращается в нуль и $\psi \equiv \psi_i^i$, а потому $\psi_i^k = h_i^k$.

Таким образом, плоская гравитационная волна определяется двумя величинами: h_{23}, $h_{22} = -h_{33}$. Другими словами, гравита-

ционные волны являются поперечными волнами, поляризация которых определяется симметричным тензором 2-го ранга в плоскости yz и сумма диагональных членов которого $h_{22}+h_{33}$ равна нулю. В качестве двух независимых поляризаций можно выбрать случаи, в которых отлична от нуля одна из двух величин h_{23} и $^1/_2(h_{22}-h_{33})$. Такие две поляризации отличаются друг от друга поворотом на угол $\pi/4$ в плоскости yz.

Вычислим псевдотензор энергии-импульса в плоской гравитационной волне. Компоненты t^{ik} — величины второго порядка малости; мы должны вычислить их, пренебрегая членами еще более высокого порядка. Поскольку при $h=0$ определитель g отличается от $g^{(0)}=-1$ лишь величинами второго порядка, то в общей формуле (96,9) можно положить $\mathfrak{g}^{ik}{}_{,l}\approx g^{ik}{}_{,l}\approx -h^{ik}{}_{,l}$. Для плоской волны все отличные от нуля члены в t^{ik} заключены в члене

$$\frac{1}{2}g^{il}g^{km}g_{np}g_{qr}g^{nr}{}_{,l}\,q^{pq}{}_{,m}=\frac{1}{2}h_q^{n,\,i}h_n^{q,\,k}$$

в фигурных скобках в (96,9) (в этом легко убедиться, выбрав одну из осей галилеевой системы отсчета в направлении распространения волны). Таким образом,

$$t^{ik}=\frac{c^4}{32\pi k}h_q^{n,\,i}h_n^{q,\,k}. \qquad (107,11)$$

Поток энергии в волне определяется величинами $-cgt^{0\alpha}\approx\approx ct^{0\alpha}$. В плоской волне, распространяющейся вдоль оси x^1, в которой отличные от нуля h_{23} и $h_{22}=-h_{33}$ зависят только от разности $t-x/c$, этот поток направлен вдоль той же оси x^1 и равен

$$ct^{01}=\frac{c^3}{16\pi k}\left[\dot{h}_{23}^2+\frac{1}{4}(\dot{h}_{22}-\dot{h}_{33})^2\right]. \qquad (107,12)$$

Начальные условия для произвольного поля гравитационных волн должны задаваться четырьмя произвольными функциями координат: в силу поперечности волн имеется всего две независимые компоненты $h_{\alpha\beta}$, вместе с которыми должны быть заданы также и их первые производные по времени. Хотя этот подсчет мы произвели здесь исходя из свойств слабого гравитационного поля, но ясно, что его результат — число 4 — не может быть связан с этим предположением и относится к любому свободному, т. е. не связанному с гравитирующими массами, гравитационному полю.

Задача

Определить тензор кривизны в слабой плоской гравитационной волне.

Решение. Вычисляя R_{iklm} по формуле (105,8), найдем следующие отличные от нуля компоненты:

$$-R_{0202}=R_{0303}=-R_{1212}=R_{0212}=R_{0331}=R_{3131}=\sigma,$$
$$R_{0203}=-R_{1231}=-R_{0312}=R_{0231}=\mu,$$

где обозначено: $\sigma = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{33} = \frac{1}{2}\ddot{h}_{22}$, $\mu = -\frac{1}{2}\ddot{h}_{23}$. В терминах введенных в (92,15) трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ имеем:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & \mu \\ 0 & \mu & \sigma \end{pmatrix}, \qquad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \sigma \\ 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix}.$$

Надлежащим поворотом осей x^2, x^3 можно обратить (в заданной точке 4-пространства) одну из величин σ или μ в нуль; обратив в нуль величину σ, приведем тензор кривизны к вырожденному типу Петрова II (тип N).

§ 108. Гравитационные волны в искривленном пространстве-времени

Подобно тому как мы рассмотрели распространение гравитационных волн «на фоне» плоского пространства-времени, можно рассмотреть распространение малых возмущений по отношению к произвольной (негалилеевой) «невозмущенной» метрике $g_{ik}^{(0)}$. Имея в виду также и некоторые другие возможные применения, выпишем здесь необходимые формулы в наиболее общем виде.

Написав снова g_{ik} в виде (107,1), найдем, что поправка первого порядка к символам Кристоффеля выражается через поправки h_{ik} согласно

$$\Gamma_{kl}^{i\,(1)} = \frac{1}{2}\left(h^i_{k;\,l} + h^i_{l;\,k} - h_{kl}{}^{;\,i}\right), \tag{108,1}$$

в чем можно убедиться прямым вычислением (здесь и ниже все тензорные операции — поднимание и опускание индексов, ковариантные дифференцирования — производятся с помощью негалилеевой метрики $g_{ik}^{(0)}$. Для поправок к тензору кривизны получается:

$$R^{i\,(1)}_{klm} = \frac{1}{2}\left(h^i_{k;\,m;\,l} + h^i_{m;\,k;\,l} - h_{km}{}^{;\,i}{}_{;\,l} - h^i_{k;\,l;\,m} - h^i_{l;\,k;\,m} + h_{kl}{}^{;\,i}{}_{;\,m}\right). \tag{108,2}$$

Отсюда поправки к тензору Риччи:

$$R^{(1)}_{ik} = R^{l\,(1)}_{ilk} = \frac{1}{2}\left(h^l_{i;\,k;\,l} + h^l_{k\,i;\,l} - h_{ik}{}^{;\,l}{}_{;\,l} - h_{;\,i;\,k}\right). \tag{108,3}$$

Поправки же к смешанным компонентам тензора Риччи получаются из соотношения

$$R_i^{k\,(0)} + R_i^{k\,(1)} = \left(R^{(0)}_{il} + R^{(1)}_{il}\right)\left(g^{kl\,(0)} - h^{kl}\right),$$

откуда

$$R_i^{k\,(1)} = g^{kl\,(0)} R^{(1)}_{il} - h^{kl} R^{(0)}_{il}. \tag{108,4}$$

Точная метрика в пустоте должна удовлетворять точным уравнениям Эйнштейна $R_{ik} = 0$. Поскольку невозмущенная ме-