

где обозначено: $\sigma = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{33} = \frac{1}{2} \ddot{h}_{22}$, $\mu = -\frac{1}{2} \ddot{h}_{23}$. В терминах введенных в (92,15) трехмерных тензоров $A_{\alpha\beta}$ и $B_{\alpha\beta}$ имеем:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma & \mu \\ 0 & \mu & \sigma \end{pmatrix}, \quad B_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & \sigma \\ 0 & \sigma & -\mu \end{pmatrix}.$$

Надлежащим поворотом осей x^2, x^3 можно обратить (в заданной точке 4-пространства) одну из величин σ или μ в нуль; обратив в нуль величину σ , приведем тензор кривизны к вырожденному типу Петрова II (типу N).

§ 108. Гравитационные волны в искривленном пространстве-времени

Подобно тому как мы рассмотрели распространение гравитационных волн «на фоне» плоского пространства-времени, можно рассмотреть распространение малых возмущений по отношению к произвольной (негалилеевой) «невозмущенной» метрике $g_{ik}^{(0)}$. Имея в виду также и некоторые другие возможные применения, выпишем здесь необходимые формулы в наиболее общем виде.

Написав снова g_{ik} в виде (107,1), найдем, что поправка первого порядка к символам Кристоффеля выражается через поправки h_{ik} согласно

$$\Gamma_{kl}^{i(1)} = \frac{1}{2} (h_{k;l}^i + h_{l;k}^i - h_{kl}^{i;l}), \quad (108,1)$$

в чем можно убедиться прямым вычислением (здесь и ниже все тензорные операции — поднимание и опускание индексов, ковариантные дифференцирования — производятся с помощью негалилеевой метрики $g_{ik}^{(0)}$). Для поправок к тензору кривизны получается:

$$R_{klm}^{i(1)} = \frac{1}{2} (h_{k;m}^i + h_{m;k}^i - h_{km}^{i;l} - h_{k;l}^i - h_{l;m}^i + h_{l;k}^{i;l} + h_{kl}^{i;m}). \quad (108,2)$$

Отсюда поправки к тензору Риччи:

$$R_{ik}^{(1)} = R_{ilk}^{i(1)} = \frac{1}{2} (h_{i;k}^l + h_{k;i}^l - h_{ik}^{i;l} - h_{i;l}^k). \quad (108,3)$$

Поправки же к смешанным компонентам тензора Риччи получаются из соотношения

$$R_i^{k(0)} + R_i^{k(1)} = (R_{il}^{(0)} + R_{il}^{(1)}) (g^{kl(0)} - h^{kl}),$$

откуда

$$R_i^{k(1)} = g^{kl(0)} R_{il}^{(1)} - h^{kl} R_{il}^{(0)}. \quad (108,4)$$

Точная метрика в пустоте должна удовлетворять точным уравнениям Эйнштейна $R_{ik} = 0$. Поскольку невозмущенная ме-

трика $g_{ik}^{(0)}$ удовлетворяет уравнениям $R_{ik}^{(0)} = 0$, то для возмущения получается уравнение $R_{ik}^{(1)} = 0$, т. е.

$$h_{i;k;l}^l + h_{k;i;l}^l - h_{ik}^{;l;l} - h_{i;k}^l = 0. \quad (108,5)$$

В общем случае произвольных гравитационных волн упрощение этого уравнения до формы, подобной (107,8), невозможно. Это можно, однако, сделать в важном случае волн большой частоты: длина волны λ и период колебаний λ/c малы по сравнению с характерными расстояниями L и характерными временами L/c , на которых меняется «фоновое поле». Каждое дифференцирование компонент h_{ik} увеличивает тогда порядок величины в отношении L/λ по сравнению с производными от невозмущенной метрики $g_{ik}^{(0)}$. Если ограничиться точностью лишь до членов двух наибольших порядков ($(L/\lambda)^2$ и (L/λ)), то в (108,5) можно менять порядок дифференцирований; действительно, разность

$$h_{i;k;l}^l - h_{i;l;k}^l \approx h_{iM}^l R_{ikl}^{m(0)} - h_i^m R_{mk}^{l(0)}$$

имеет порядок $(L/\lambda)^0$, между тем как каждое из выражений $h_{i;k;l}^l$ и $h_{i;l;k}^l$ содержит члены обоих больших порядков. Наложив теперь на h_{ik} дополнительные условия

$$\psi_i^k = 0 \quad (108,6)$$

(аналогичные (107,5)), получим уравнение

$$h_{ik}^{;l;l} = 0, \quad (108,7)$$

обобщающее уравнение (107,8).

По причинам, указанным в § 107, условие (108,6) не фиксирует однозначный выбор координат. Последние можно еще подвергнуть преобразованию $x'^i = x^i + \xi^i$, где малые величины ξ^i удовлетворяют уравнению $\xi_{;k}^i = 0$. Этими преобразованиями можно, в частности, воспользоваться для того, чтобы наложить на h_{ik} также и условие $h \equiv h_i^i = 0$. Тогда $\psi_i^k = h_i^k$, так что h_i^k подчинены условиям

$$h_{i;k}^k = 0, \quad h = 0. \quad (108,8)$$

Круг все еще допустимых преобразований суживается после этого требованием $\xi_{;i}^i = 0$.

Псевдотензор t^{ik} содержит, вообще говоря, наряду с невозмущенной частью $t^{ik(0)}$ также и члены различных порядков по h_{ik} . Мы придем к выражению, аналогичному (107,11), если рассмотрим величины t^{ik} , усредненные по участкам 4-пространства с размерами, большими по сравнению с λ , но малыми по сравнению с L . Такое усреднение (обозначаемое ниже угловыми скобками $\langle \dots \rangle$) не затрагивает $g_{ik}^{(0)}$ и обращает в нуль все члены,

линейные по быстро осциллирующим величинам h_{ik} . Из квадратичных же членов сохраним лишь члены наиболее высокого (второго) порядка по $1/\lambda$; это — члены, квадратичные по производным $h_{ik}, i \equiv \partial h_{ik}/\partial x^i$.

При такой степени точности все члены в t^{lk} , представляющие собой 4-дивергенции, могут быть опущены. Действительно, интегралы от таких выражений по области 4-пространства (области усреднения) преобразуются согласно теореме Гаусса, в результате чего их порядок величины по $1/\lambda$ уменьшается на единицу. Кроме того, выпадают члены, обращающиеся в нуль в силу (108,7) и (108,8) после интегрирования по частям. Так, интегрируя по частям и опуская интеграл от 4-дивергенции, находим:

$$\langle h^{ln}_{,p} h^p_{l,n} \rangle = - \langle h^{ln} h^p_{,p,n} \rangle = 0,$$

$$\langle h^{ll}_{,n} h^k_{l,n} \rangle = - \langle h^{ll} h^k_{l,n} \rangle = 0.$$

В результате из всех членов второго порядка остается лишь

$$\langle t^{lk}{}^{(2)} \rangle = \frac{c^4}{32\pi k} \langle h_q^{n,i} h_n^{q,k} \rangle. \quad (108,9)$$

Отметим, что при этом, с той же точностью, $\langle f_i^{(2)} \rangle = 0$.

Обладая определенной энергией, гравитационная волна сама является источником некоторого дополнительного гравитационного поля. Вместе с создающей его энергией это поле — эффект второго порядка по величинам h_{ik} . Но в случае высокочастотных гравитационных волн эффект существенно усиливается: тот факт, что псевдотензор t^{lk} квадратичен по производным от h_{ik} , привносит в его порядок величины большой множитель λ^{-2} . В таком случае можно сказать, что сами волны создают фоновое поле, на котором они распространяются. Это поле целесообразно рассматривать, проводя описанное выше усреднение по участкам 4-пространства с размерами, большими по сравнению с λ . Такое усреднение сглаживает коротковолновую «рябь» и оставляет медленно меняющуюся фоновую метрику (*R. A. Isaacson, 1968*).

Для вывода уравнения, определяющего эту метрику, надо учсть в разложении тензора R_{ik} члены не только линейные, но и квадратичные по h_{ik} : $R_{ik} = R_{ik}^{(0)} + R_{ik}^{(1)} + R_{ik}^{(2)}$. Как уже указывалось, усреднение не затрагивает членов нулевого порядка. Таким образом, усредненные уравнения поля $\langle R_{ik} \rangle = 0$ принимают вид

$$R_{ik}^{(0)} = - \langle R_{ik}^{(2)} \rangle, \quad (108,10)$$

причем в $R_{ik}^{(2)}$ надо сохранить лишь члены второго порядка по $1/\lambda$. Их легко найти из тождества (96,7). Квадратичные по h_{ik} члены, возникающие из правой части этого тождества, имеющей

вид 4-дивергенции, исчезают (с рассматриваемой точностью) при усреднении и, таким образом, остается

$$\langle \left(R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R \right)^{(2)} \rangle = - \frac{8\pi k}{c^4} \langle t^{ik}{}^{(2)} \rangle$$

или, поскольку $\langle t^{i(2)} \rangle = 0$, с той же точностью:

$$\langle R_{ik}{}^{(2)} \rangle = - \frac{8\pi k}{c^4} \langle t_{ik}{}^{(2)} \rangle.$$

Наконец, используя (108,9), получим окончательно уравнение (108,10) в виде

$$R_{ik}^{(0)} = \frac{1}{4} \langle h_{q,i}^n h_{n,k}^q \rangle. \quad (108,11)$$

Если «фон» создается целиком самими волнами, уравнения (108,11) и (108,7) должны решаться совместно. Оценка выражений в обеих сторонах уравнения (108,11) показывает, что в этом случае радиус кривизны фоновой метрики по своему порядку величины L связан с длиной волны λ и порядком величины ее поля h согласно $L^{-2} \sim h^2/\lambda^2$, т. е. $\lambda/L \sim h$.

§ 109. Сильная гравитационная волна

В этом параграфе будет рассмотрено решение уравнений Эйнштейна, представляющее собой обобщение слабой плоской гравитационной волны в плоском пространстве-времени (*J. Robinson, H. Bondi, 1957*).

Будем искать решение, в котором все компоненты метрического тензора оказываются, при надлежащем выборе системы отсчета, функциями лишь одной переменной, которую назовем x^0 (не предопределяя, однако, ее характера). Это условие допускает еще преобразования координат вида

$$x^\alpha \rightarrow x^\alpha + \varphi^\alpha(x^0), \quad (109,1)$$

$$x^0 \rightarrow \varphi^0(x^0), \quad (109,2)$$

где $\varphi^0, \varphi^\alpha$ — произвольные функции.

Характер решения существенно зависит от того, можно ли тремя преобразованиями (109,1) обратить все $g_{0\alpha}$ в нуль. Это можно сделать, если определитель $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$. Действительно, при преобразовании (109,1) $g_{0\alpha} \rightarrow g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\beta$ (где точка означает дифференцирование по x^0); при $|g_{\alpha\beta}| \neq 0$ система уравнений

$$g_{0\alpha} + g_{\alpha\beta}\dot{\varphi}^\beta = 0$$

определеняет $\dot{\varphi}^\beta(x^0)$, осуществляющие требуемое преобразование. Такой случай будет рассмотрен в § 117; здесь же нас будет интересовать решение, в котором

$$|g_{\alpha\beta}| = 0. \quad (109,3)$$