вид 4-дивергенции, исчезают (с рассматриваемой точностью) при усреднении и, таким образом, остается

$$\left\langle\left(R^{ik}-\frac{1}{2}g^{ik}R\right)^{(2)}\right\rangle=-\frac{8\pi k}{c^4}\langle t^{ik\,(2)}\rangle$$

или, поскольку $\langle t_i^{i(2)}\rangle=0$, с той же точностью:

$$\langle R_{ik}^{(2)}\rangle=-\frac{8\pi k}{c^4}\langle t_{ik}^{(2)}\rangle.$$

Наконец, используя (108,9), получим окончательно уравнение (108,10) в виде

$$R_{ik}^{(0)}=\frac{1}{4}\langle h_{q,\,i}^{n}\,h_{n,\,k}^{q}\rangle. \qquad (108,11)$$

Если «фон» создается целиком самими волнами, уравнения (108,11) и (108,7) должны решаться совместно. Оценка выражений в обеих сторонах уравнения (108,11) показывает, что в этом случае радиус кривизны фоновой метрики по своему порядку величины L связан с длиной волны λ и порядком величины ее поля h согласно $L^{-2}\sim h^2/\lambda^2$, т. е. $\lambda/L\sim h$.

§ 109. Сильная гравитационная волна

В этом параграфе будет рассмотрено решение уравнений Эйнштейна, представляющее собой обобщение слабой плоской гравитационной волны в плоском пространстве-времени (*I. Robinson, H. Bondi*, 1957).

Будем искать решение, в котором все компоненты метрического тензора оказываются, при надлежащем выборе системы отсчета, функциями лишь одной переменной, которую назовем x^0 (не предопределяя, однако, ее характера). Это условие допускает еще преобразования координат вида

$$x^\alpha\to x^\alpha+\varphi^\alpha(x^0), \qquad (109,1)$$

$$x^0\to\varphi^0(x^0), \qquad (109,2)$$

где φ^0, φ^α — произвольные функции.

Характер решения существенно зависит от того, можно ли тремя преобразованиями (109,1) обратить все $g_{0\alpha}$ в нуль. Это можно сделать, если определитель $|g_{\alpha\beta}|\neq0$. Действительно, при преобразовании (109,1) $g_{0\alpha}\to g_{0\alpha}+g_{\alpha\beta}\dot\varphi^\beta$ (где точка означает дифференцирование по x^0); при $|g_{\alpha\beta}|\neq0$ система уравнений

$$g_{0\alpha}+g_{\alpha\beta}\dot\varphi^\beta=0$$

определяет $\varphi^\beta(x^0)$, осуществляющие требуемое преобразование. Такой случай будет рассмотрен в § 117; здесь же нас будет интересовать решение, в котором

$$|g_{\alpha\beta}|=0. \qquad (109,3)$$

В таком случае системы отсчета, в которой бы все $g_{0\alpha}=0$, не существует. Вместо этого, однако, четырьмя преобразованиями (109,1—2) можно добиться того, чтобы было

$$g_{01}=1, \quad g_{00}=g_{02}=g_{03}=0. \tag{109,4}$$

Переменная x^0 имеет при этом «световой» характер: при $dx^\alpha=0$, $dx^0\neq 0$ интервал $ds=0$; выбранную таким образом переменную x^0 будем обозначать ниже как $x^0=\eta$. Элемент интервала при условиях (109,4) можно представить в виде

$$ds^2=2dx^1d\eta+g_{ab}(dx^a+g^adx^1)(dx^b+g^bdx^1). \tag{109,5}$$

Здесь и ниже в этом параграфе индексы a, b, c, ... пробегают значения 2, 3; $g_{ab}(\eta)$ можно рассматривать как двухмерный тензор, а две величины $g^a(\eta)$ — как компоненты двухмерного вектора. Вычисление величин R_{ab} приводит к следующим уравнениям поля:

$$R_{ab}=-\frac{1}{2}g_{ac}\dot{g}^cg_{bd}\dot{g}^d=0.$$

Отсюда следует, что $g_{ac}\dot{g}^c=0$ или $\dot{g}^c=0$, т. е. $g^c=\text{const}$. Преобразованием $x^a+g^ax^1\to x^a$ можно поэтому привести рассматриваемую метрику к виду

$$ds^2=2dx^1d\eta+g_{ab}(\eta)dx^adx^b. \tag{109,6}$$

Определитель $-g$ этого метрического тензора совпадает с определителем $|g_{ab}|$, а из всех символов Кристоффеля отличны от нуля лишь следующие:

$$\Gamma^a_{b0}=\frac{1}{2}\varkappa^a_b, \quad \Gamma^1_{ab}=-\frac{1}{2}\varkappa_{ab},$$

где мы ввели двухмерный тензор $\varkappa_{ab}=\dot{g}_{ab}$, $\varkappa^b_a=g^{bc}\varkappa_{ac}$. Из всех компонент тензора Риччи не обращается тождественно в нуль лишь R_{00}, так что имеем уравнение

$$R_{00}=-\frac{1}{2}\dot{\varkappa}^a_a-\frac{1}{4}\varkappa^b_a\varkappa^a_b=0. \tag{109,7}$$

Таким образом, три функции $g_{22}(\eta)$, $g_{23}(\eta)$, $g_{33}(\eta)$ должны удовлетворять всего одному уравнению. Поэтому две из них могут быть заданы произвольно. Удобно представить уравнение (109,7) в другом виде, написав величины g_{ab} в виде

$$g_{ab}=-\chi^2\gamma_{ab}, \quad |\gamma_{ab}|=1. \tag{109,8}$$

Тогда определитель $-g=|g_{ab}|=\chi^4$ и подстановка в (109,7) дает после простого преобразования

$$\ddot{\chi}+\frac{1}{8}(\dot{\gamma}_{ac}\gamma^{bc})(\dot{\gamma}_{bd}\gamma^{ad})\chi=0 \tag{109,9}$$

(γ^{ab} — двухмерный тензор, обратный тензору γ_{ab}). Если задать произвольные функции $\gamma_{ab}(\eta)$ (связанные друг с другом со-

отношением $|\gamma_{ab}| = 1$), этим уравнением определится функция $\chi(\eta)$.

Мы приходим, таким образом, к решению, содержащему две произвольные функции. Легко видеть, что оно представляет собой обобщение рассмотренной в § 107 слабой плоской гравитационной волны (распространяющейся в одном направлении)[1]. Последняя получается, если произвести преобразование

$$\eta = \frac{t+x}{\sqrt{2}}, \quad x^1 = \frac{t-x}{\sqrt{2}}$$

и положить $\gamma_{ab} = \delta_{ab} + h_{ab}(\eta)$ (где h_{ab} — малые величины, подчиненные условию $h_{22} + h_{33} = 0$) и $\chi = 1$; постоянное значение χ удовлетворяет уравнению (109,9), если пренебречь в нем малыми членами второго порядка.

Пусть через какую-либо точку x пространства проходит слабая гравитационная волна конечной протяженности («волновой пакет»). До начала прохождения имеет $h_{ab} = 0$, $\chi = 1$; после конца прохождения снова $h_{ab} = 0$, $\partial^2\chi/\partial t^2 = 0$, но учет членов второго порядка в уравнении (109,9) приведет к появлению отличного от нуля отрицательного значения $\partial\chi/\partial t$:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} \approx -\frac{1}{8}\int\left(\frac{\partial h_{ab}}{\partial t}\right)^2 dt < 0$$

(интеграл берется по времени прохождения волны). Поэтому после прохождения волны будет $\chi = 1 - \mathrm{const}\cdot t$ и по истечении конечного промежутка времени χ изменит знак. Но обращение χ в нуль есть обращение в нуль метрического определителя g, т. е. особенность в метрике. Эта особенность, однако, не имеет физического характера; она связана лишь с недостатками системы отсчета, «испорченной» проходящей гравитационной волной, и может быть устранена надлежащим ее преобразованием; после прохождения волны пространство-время оказывается в действительности снова плоским.

В этом можно убедиться непосредственным образом. Если отсчитывать переменную η от ее значения, соответствующего особой точке, то $\chi = \eta$, так что

$$ds^2 = 2d\eta dx^1 - \eta^2[(dx^2)^2 + (dx^3)^2].$$

После преобразования

$$\eta x^2 = y, \quad \eta x^3 = z, \quad x^1 = \xi - \frac{y^2+z^2}{2\eta}$$

получаем:

$$ds^2 = 2d\eta\, d\xi - dy^2 - dz^2,$$

---

[1]) Решение родственного характера от большего числа переменных см. *I. Robinson, A. Trautman*, Phys. Rev. Lett. **4**, 431 (1960); Proc. Roy. Soc. **A265**, 463 (1962).

и подстановка $\eta = (t + x)/\sqrt{2}$, $\xi = (t - x)/\sqrt{2}$ окончательно приводит метрику к галилеевой форме.

Это свойство гравитационной волны — возникновение фиктивной особенности — не связано, конечно, с ее слабостью и присуще также и общему решению уравнения (109,7); как и в рассмотренном примере, вблизи особенности $\chi \sim \eta$, т. е. $-g \sim \eta^4$ [1]).

Задача

Найти условие, при котором метрика вида

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + f(t - x, y, z)(dt - dx)^2$$

является точным решением уравнений Эйнштейна для поля в пустоте (*A. Peres*, 1960).

Решение. Тензор Риччи вычисляется проще всего в координатах $u = (t - x)/\sqrt{2}$, $v = (t + x)/\sqrt{2}$, y, z, в которых

$$ds^2 = -dy^2 - dz^2 + 2\,du\,dv + 2f(u, y, z)\,du^2.$$

Помимо $g_{22} = g_{33} = -1$, отличны от нуля лишь следующие компоненты метрического тензора: $g_{uu} = 2f$, $g_{uv} = 1$; при этом $g^{vv} = -2f$, $g^{uv} = 1$, а определитель $g = -1$. Прямое вычисление по (92,1) дает для отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{yuyu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad R_{zuzu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \qquad R_{yuzu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}.$$

Единственная отличная от нуля компонента тензора Риччи: $R_{uu} = \Delta f$, где Δ — оператор Лапласа по координатам y, z. Таким образом, уравнение Эйнштейна: $\Delta f = 0$, т. е. функция $f(t - x, y, z)$ должна быть гармонической по переменным y, z.

Если функция f не зависит от y, z или линейна по этим переменным, поле отсутствует — пространство-время плоское (тензор кривизны обращается в нуль). Квадратичная по y, z функция

$$f(u, y, z) = yzf_1(u) + \frac{1}{2}(y^2 - z^2)f_2(u)$$

отвечает плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси x; действительно, тензор кривизны в таком поле зависит только от $t - x$:

$$R_{yuzu} = -f_1(u), \qquad R_{yuyu} = -R_{zuzu} = -f_2(u).$$

В соответствии с двумя возможными поляризациями волны метрика содержит в этом случае две произвольные функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$.

§ 110. Излучение гравитационных волн

Рассмотрим слабое гравитационное поле, создаваемое телами, движущимися со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

---

[1]) Это можно показать с помощью уравнения (109,7) в точности тем же способом, как это было сделано в § 97 для аналогичного трехмерного уравнения в синхронной системе отсчета. Как и там, происхождение фиктивной особенности связано с пересечением координатных линий.