и подстановка $\eta = (t + x)/\sqrt{2}$, $\xi = (t - x)/\sqrt{2}$ окончательно приводит метрику к галилеевой форме.

Это свойство гравитационной волны — возникновение фиктивной особенности — не связано, конечно, с ее слабостью и присуще также и общему решению уравнения (109,7); как и в рассмотренном примере, вблизи особенности $\chi \sim \eta$, т. е. $-g \sim \eta^4$ [1]).

Задача

Найти условие, при котором метрика вида

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + f(t - x, y, z)(dt - dx)^2$$

является точным решением уравнений Эйнштейна для поля в пустоте (*A. Peres*, 1960).

Решение. Тензор Риччи вычисляется проще всего в координатах $u = (t - x)/\sqrt{2}$, $v = (t + x)/\sqrt{2}$, y, z, в которых

$$ds^2 = -dy^2 - dz^2 + 2\,du\,dv + 2f(u, y, z)\,du^2.$$

Помимо $g_{22} = g_{33} = -1$, отличны от нуля лишь следующие компоненты метрического тензора: $g_{uu} = 2f$, $g_{uv} = 1$; при этом $g^{vv} = -2f$, $g^{uv} = 1$, а определитель $g = -1$. Прямое вычисление по (92,1) дает для отличных от нуля компонент тензора кривизны:

$$R_{yuyu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \qquad R_{zuzu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \qquad R_{yuzu} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}.$$

Единственная отличная от нуля компонента тензора Риччи: $R_{uu} = \Delta f$, где Δ — оператор Лапласа по координатам y, z. Таким образом, уравнение Эйнштейна: $\Delta f = 0$, т. е. функция $f(t - x, y, z)$ должна быть гармонической по переменным y, z.

Если функция f не зависит от y, z или линейна по этим переменным, поле отсутствует — пространство-время плоское (тензор кривизны обращается в нуль). Квадратичная по y, z функция

$$f(u, y, z) = yzf_1(u) + \frac{1}{2}(y^2 - z^2)f_2(u)$$

отвечает плоской волне, распространяющейся в положительном направлении оси x; действительно, тензор кривизны в таком поле зависит только от $t - x$:

$$R_{yuzu} = -f_1(u), \qquad R_{yuyu} = -R_{zuzu} = -f_2(u).$$

В соответствии с двумя возможными поляризациями волны метрика содержит в этом случае две произвольные функции $f_1(u)$ и $f_2(u)$.

§ 110. Излучение гравитационных волн

Рассмотрим слабое гравитационное поле, создаваемое телами, движущимися со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

---

[1]) Это можно показать с помощью уравнения (109,7) в точности тем же способом, как это было сделано в § 97 для аналогичного трехмерного уравнения в синхронной системе отсчета. Как и там, происхождение фиктивной особенности связано с пересечением координатных линий.

Благодаря наличию материи уравнения гравитационного поля будут отличаться от простого волнового уравнения вида $\Box h_i^k = 0$ (107,8) наличием в правой стороне равенства членов, происходящих от тензора энергии-импульса материи. Напишем эти уравнения в виде

$$\frac{1}{2}\Box\psi^k = \frac{8\pi k}{c^4}\tau_i^k, \tag{110,1}$$

где мы ввели вместо h_i^k более удобные для этого случая величины

$$\psi_i^k = h_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k h,$$

а τ_i^k условно обозначает дополнительные выражения, получающиеся при переходе в точных уравнениях тяготения к случаю слабых полей в рассматриваемом приближении. Легко убедиться в том, что компоненты τ_0^0 и τ_α^0 получаются непосредственно из соответствующих компонент T_i^k путем выделения из них величин интересующего нас порядка малости; что же касается компонент τ_β^α, то они содержат наряду с членами, получающимися из T_β^α, также и члены второго порядка малости из $R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k R$ [1]).

Величины ψ_i^k удовлетворяют условию (107,5) $\partial\psi_i^k/\partial x^k = 0$. Из (110,1) следует, что такое же уравнение имеет место и для τ_i^k:

$$\frac{\partial\tau_i^k}{\partial x^k} = 0. \tag{110,2}$$

Это уравнение заменяет здесь общее соотношение $T_{i;k}^k = 0$.

Рассмотрим с помощью написанных уравнений вопрос об энергии, излучаемой движущимися телами в виде гравитационных волн. Решение этого вопроса требует определения гравитационного поля в «волновой зоне», т. е. на расстояниях, больших по сравнению с длиной излучаемых волн.

Все вычисления принципиально вполне аналогичны тем, которые мы производили для электромагнитных волн. Уравнения

---

[1]) Из уравнений (110,1) можно вновь получить использованные в § 106 формулы (106,1—2) для слабого постоянного поля вдали от тел. В первом приближении пренебрегаем членами со вторыми производными по времени (содержащими $1/c^2$), а из всех компонент τ_i^k оставляем лишь $\tau_0^0 = \mu c^2$. Решение уравнений $\Delta\psi_\alpha^\beta = 0$, $\Delta\psi_0^\alpha = 0$, $\Delta\psi_0^0 = 16\pi k\mu/c^2$, обращающееся на бесконечности в нуль, есть $\psi_\alpha^\beta = 0$, $\psi_0^\alpha = 0$, $\psi_0^0 = 4\varphi/c^2$, где φ — ньютоновский гравитационный потенциал; ср. уравнение (99,2). Отсюда для тензора $h_i^k = \psi_i^k - {}^1/_2\psi\delta_i^k$ получаются значения (106, 1—2).

слабого гравитационного поля (110,1) по форме совпадают с уравнением запаздывающих потенциалов (§ 62). Поэтому их общее решение можно сразу написать в виде

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4}\int (\tau_i^k)_{t-R/c}\frac{dV}{R}. \qquad (110,3)$$

Поскольку скорости всех тел в системе малы, то для поля на больших расстояниях от системы можно написать (ср. §§ 66 и 67):

$$\psi_i^k = -\frac{4k}{c^4 R_0}\int (\tau_i^k)_{t-R_0/c}\, dV, \qquad (110,4)$$

где R_0 — расстояние от начала координат, расположенного где-нибудь внутри системы; индекс $t - R_0/c$ в подынтегральных выражениях мы будем ниже для краткости опускать.

Для вычисления этих интегралов воспользуемся уравнениями (110,2). Опуская индексы у τ_i^k и выделяя пространственные и временные компоненты, пишем (110,2) в виде

$$\frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{\alpha 0}}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{0\gamma}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial \tau_{00}}{\partial x^0} = 0. \qquad (110,5)$$

Умножив первое уравнение на x^β, проинтегрируем по всему пространству

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{\alpha 0} x^\beta dV = \int \frac{\partial \tau_{\alpha\gamma}}{\partial x^\gamma} x^\beta dV = \int \frac{\partial (\tau_{\alpha\gamma} x^\beta)}{\partial x^\gamma} dV - \int \tau_{\alpha\beta} dV.$$

Поскольку на бесконечности $\tau_{ik} = 0$, то первый интеграл правой части, будучи преобразован по теореме Гаусса, исчезает. Полусумма оставшегося равенства и его же с переставленными индексами дает:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^0}\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Далее умножим второе из уравнений (110,5) на $x^\alpha x^\beta$ и тоже проинтегрируем по всему пространству. Аналогичное преобразование приводит к равенству

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV = -\int (\tau_{\alpha 0} x^\beta + \tau_{\beta 0} x^\alpha)\, dV.$$

Сравнивая оба полученных результата, находим:

$$\int \tau_{\alpha\beta} dV = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 \int \tau_{00} x^\alpha x^\beta dV. \qquad (110,6)$$

Таким образом, интегралы от всех $\tau_{\alpha\beta}$ оказываются выраженными через интегралы, содержащие только компоненту τ_{00}. Но эта последняя, как указано выше, совпадает с соответствую-

шей компонентой T_{00} тензора энергии-импульса, и с достаточной точностью (см. (99,1)) имеем:

$$\tau_{00} = \mu c^2. \tag{110,7}$$

Подставляя это в (110,6) и вводя время $t = x^0/c$, переписываем (110,4) в виде

$$\psi_{\alpha\beta} = -\frac{2k}{c^4 R_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mu x^\alpha x^\beta dV. \tag{110,8}$$

На больших расстояниях от тел можно рассматривать волну (в небольших участках пространства) как плоскую. Поэтому можно вычислить поток энергии, излучаемой системой, скажем, в направлении оси x^1, воспользовавшись формулой (107,12). В эту формулу входят только компоненты $h_{23} = \psi_{23}$ и $h_{22} - h_{33} = \psi_{22} - \psi_{33}$. Из (110,8) находим для них выражения [1])

$$h_{23} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}\ddot{D}_{23}, \quad h_{22} - h_{33} = -\frac{2k}{3c^4 R_0}(\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}) \tag{110,9}$$

(точка означает дифференцирование по времени), где введен тензор квадрупольного момента масс (99,8)

$$D_{\alpha\beta} = \int \mu (3x^\alpha x^\beta - r^2\delta_{\alpha\beta})\, dV. \tag{110,10}$$

В результате находим плотность потока энергии в направлении оси x^1 в виде

$$cl^{10} = \frac{k}{36\pi c^5 R_0^2}\left[\left(\frac{\ddot{D}_{22} - \ddot{D}_{33}}{2}\right)^2 + \dddot{D}_{23}^2\right]. \tag{110,11}$$

Поток энергии в элемент телесного угла в данном направлении получится отсюда умножением на $R_0^2 do$.

Два члена в этом выражении отвечают излучению волн двух независимых поляризаций. Для записи их в инвариантном (не зависящем от выбора направления излучения) виде, введем трехмерный единичный тензор поляризации плоской гравитационной волны $e_{\alpha\beta}$, определяющий, какие именно из компонент $h_{\alpha\beta}$ отличны от нуля (в калибровке h_{ik}, в которой $h_{0\alpha} = h_{00} = h = 0$). Тензор поляризации симметричен и удовлетворяет условиям

$$e_{\alpha\alpha} = 0, \quad e_{\alpha\beta}n_\beta = 0, \quad e_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta} = 1, \tag{110,12}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении распространения волны; первые два условия выражают тензорность и поперечность волны.

---

[1]) Тензор (110,8) не удовлетворяет тем условиям, при которых была выведена формула (107,12). Однако преобразование системы отсчета, приводящее h_{ik} к требуемой калибровке, не затрагивает значений используемых здесь компонент (110,9).

С помощью этого тензора интенсивность излучения заданной поляризации в телесный угол do запишется в виде

$$dI = \frac{k}{72\pi c^5}\left(\dddot{D}_{\alpha\beta}e_{\alpha\beta}\right)^2 do. \qquad (110,13)$$

Это выражение зависит от направления $\mathbf{n}$ неявным образом — через условие поперечности $e_{\alpha\beta}n_\beta = 0$. Суммарное угловое распределение излучения всех поляризаций получается суммированием (110,13) по поляризациям или, что то же, усреднением по поляризациям и умножением результата на 2 (число независимых поляризаций). Усреднение осуществляется формулой

$$\overline{e_{\alpha\beta}e_{\gamma\delta}} = \frac{1}{4}\{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\delta + (n_\alpha n_\beta \delta_{\gamma\delta} + n_\gamma n_\delta \delta_{\alpha\beta}) - \\ - (n_\alpha n_\gamma \delta_{\beta\delta} + n_\beta n_\gamma \delta_{\alpha\delta} + n_\alpha n_\delta \delta_{\beta\gamma} + n_\beta n_\delta \delta_{\alpha\gamma}) - \\ - \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + (\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\beta\gamma}\delta_{\alpha\delta})\} \qquad (110,14)$$

(выражение справа — тензор, составленный из единичного тензора и компонент вектора $\mathbf{n}$, обладающий требуемой симметрией по своим индексам, дающий единицу при упрощении по парам индексов α, γ и β, δ, и обращающийся в нуль при скалярном умножении на $\mathbf{n}$). В результате находим:

$$dI = \frac{k}{36\pi c^5}\left[\frac{1}{4}\left(\dddot{D}_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta\right)^2 + \frac{1}{2}\dddot{D}^2_{\alpha\beta} - \dddot{D}_{\alpha\beta}\dddot{D}_{\alpha\gamma}n_\beta n_\gamma\right] do. \qquad (110,15)$$

Полное излучение по всем направлениям, т. е. потерю энергии системой в единицу времени $(-d\mathscr{E}/dt)$, можно найти, усреднив dI/do по направлениям $\mathbf{n}$ и умножив результат на 4π. Усреднение легко производится с помощью формул, приведенных в примечании на стр. 250, и приводит к выражению (*А. Эйнштейн*, 1918)

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{k}{45c^5}\dddot{D}^2_{\alpha\beta}. \qquad (110,16)$$

Отметим, что излучение гравитационных волн оказывается эффектом пятого порядка по $1/c$. Это обстоятельство, вместе с малостью гравитационной постоянной k, приводит, вообще говоря, к чрезвычайной малости эффекта.

Задачи

1. Два тела, притягивающиеся по закону Ньютона, движутся по круговым орбитам (вокруг их общего центра инерции). Определить среднюю (по периоду обращения) интенсивность излучения гравитационных волн и его распределение по поляризациям и направлениям.

Решение. Выбрав начало координат в центре инерции, имеем для радиус-векторов двух тел:

$$\mathbf{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2.$$

Компоненты тензора $D_{\alpha\beta}$ (плоскость xy совпадает с плоскостью движения):

$$D_{xx} = \mu r^2 (3\cos^2\psi - 1), \qquad D_{yy} = \mu r^2 (3\sin^2\psi - 1),$$
$$D_{xy} = 3\mu r^2 \cos\psi \sin\psi, \qquad D_{zz} = -\mu r^2,$$

где $\mu = m_1 m_2/(m_1 + m_2)$, ψ — полярный угол вектора $\mathbf{r}$ в плоскости xy. При круговом движении $r = \text{const}$, а $\dot\psi = r^{-3/2}\sqrt{k(m_1+m_2)} \equiv \omega$.

Направление $\mathbf{n}$ задаем сферическими углами (полярным углом θ и азимутом φ) с полярной осью z, перпендикулярной к плоскости движения. Рассматриваем две поляризации, для которых: 1) $e_{\theta\varphi} = 1/\sqrt{2}$, 2) $e_{\theta\theta} = -e_{\varphi\varphi} = 1/\sqrt{2}$. Проецируя тензор $D_{\alpha\beta}$ на направления сферических ортов $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}_\varphi$, вычисляя по формуле (110,13) и усредняя по времени, получим в результате для этих двух случаев и для суммы $I = I_1 + I_2$:

$$\overline{\frac{dI_1}{do}} = \frac{k\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5} 4\cos^2\theta, \qquad \overline{\frac{dI_2}{do}} = \frac{k\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5}(1+\cos^2\theta)^2,$$
$$\overline{\frac{dI}{do}} = \frac{k\mu^2\omega^6 r^4}{2\pi c^5}(1 + 6\cos^2\theta + \cos^4\theta),$$

и после интегрирования по направлениям:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = I = \frac{32k\mu^2\omega^6 r^4}{5c^5} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^5}, \qquad \frac{\overline{I_1}}{\overline{I_2}} = \frac{5}{7}$$

(для вычисления одной лишь полной интенсивности I следовало бы, конечно, воспользоваться (110,16)).

Потеря энергии излучающей системой приводит к постепенному (как говорят, вековому) сближению обоих тел. Поскольку $\mathscr{E} = -km_1m_2/2r$, то скорость сближения

$$\dot r = \frac{2r^2}{km_1m_2}\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -\frac{64k^3 m_1 m_2 (m_1+m_2)}{5c^5 r^3}.$$

2. Найти среднюю (по периоду обращения) энергию, излучаемую в виде гравитационных волн системой двух тел, движущихся по эллиптическим орбитам (*P. C. Peters, J. Mathews* [1]).

Решение. В отличие от случая кругового движения, расстояние r и угловая скорость меняются вдоль орбиты по законам

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 + e\cos\psi, \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r^2}[k(m_1+m_2)a(1-e^2)]^{1/2},$$

где e — эксцентриситет, а a — большая полуось орбиты (см. I § 15). Довольно длинное вычисление по (110,16) дает:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{8k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{15a^5c^5(1-e^2)^5}(1+e\cos\psi)^4[12(1+e\cos\psi)^2 + e^2\sin^2\psi].$$

При усреднении по периоду обращения интегрирование по dt заменяется интегрированием по $d\psi$ и приводит к результату:

$$-\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}} = \frac{32k^4 m_1^2 m_2^2 (m_1+m_2)}{5c^5a^5}\frac{1}{(1-e^2)^{7/2}}\left(1 + \frac{73}{24}e^2 + \frac{37}{96}e^4\right).$$

[1]) Угловое, поляризационное и спектральное распределения этого излучения — см. Phys. Rev. **131**, 435 (1963).

Обратим внимание на быстрое возрастание интенсивности излучения с увеличением эксцентриситета орбиты.

3. Определить среднюю (по времени) скорость потери момента импульса системой стационарно движущихся тел, испускающей гравитационные волны.

Решение. Для удобства записи формул будем временно рассматривать тела как состоящие из дискретных частиц. Представим среднюю скорость потери энергии системой как работу действующих на частицы «сил трения» $\mathbf{f}$:

$$\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}} = \sum \overline{\mathbf{f}\mathbf{v}} \tag{1}$$

(индекс, нумерующий частицы, не выписываем). Тогда средняя скорость потери момента вычисляется как

$$\overline{\frac{dM_\alpha}{dt}} = \sum \overline{[\mathbf{r}\mathbf{f}]_\alpha} = \sum e_{\alpha\beta\gamma}\overline{x_\beta f_\gamma} \tag{2}$$

(ср. вывод формулы (75,7)). Для определения $\mathbf{f}$ пишем:

$$\overline{\frac{d\mathscr{E}}{dt}} = -\frac{k}{45c^5}\overline{\dddot{D}_{\alpha\beta}\ddot{D}_{\alpha\beta}} = -\frac{k}{45c^5}\overline{\dot{D}_{\alpha\beta}\dot{D}^{(V)}_{\alpha\beta}}$$

(использовано равенство нулю средних значений от полных производных по времени). Подставив сюда $\dot{D}_{\alpha\beta} = \sum m\,(3x_\alpha v_\beta + 3x_\beta v_\alpha - 2\mathbf{r}\mathbf{v}\delta_{\alpha\beta})$ и сравнив с (1), найдем:

$$f_\alpha = -\frac{2k}{15c^5}D^{(V)}_{\alpha\beta}\,m x_\beta.$$

Подстановка этого выражения в (2) приводит к результату:

$$\overline{\frac{dM_\alpha}{dt}} = -\frac{2k}{45c^5}e_{\alpha\beta\gamma}\overline{D^{(V)}_{\beta\delta}D_{\gamma\delta}} = -\frac{2k}{45c^5}e_{\alpha\beta\gamma}\overline{\ddot{D}_{\beta\delta}\ddot{D}_{\gamma\delta}}. \tag{3}$$

4. Для системы двух тел, движущихся по эллиптическим орбитам, найти средний теряемый ею в единицу времени момент импульса.

Решение. Вычисление по формуле (3) из предыдущей задачи, аналогичное произведенному в задаче 2, приводит к результату:

$$-\overline{\frac{dM_z}{dt}} = \frac{32k^{7/2}m_1^2m_2^2\sqrt{m_1+m_2}}{5c^5a^{7/2}}\,\frac{1}{(1-e^2)^2}\left(1+\frac{7}{8}e^2\right).$$

При круговом движении ($e=0$) значения $\dot{\mathscr{E}}$ и $\dot{M}$ находятся, как и следовало, в соотношении $\dot{\mathscr{E}} = \dot{M}\omega$.