ГЛАВА XIV

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КОСМОЛОГИЯ

§ 111. Изотропное пространство

Общая теория относительности открывает новые пути подхода к решению вопросов, связанных со свойствами мира, рассматриваемого в космических масштабах. Возникающие здесь новые замечательные возможности (впервые указанные Эйнштейном в 1917 г.) связаны с негалилеевостью пространства-времени.

Прежде чем приступить к систематическому построению релятивистских космологических моделей, сделаем следующее замечание по поводу основных исходных уравнений поля.

Требования, поставленные в § 93 в качестве условий для определения действия гравитационного поля, будут по-прежнему удовлетворены, если к скаляру G добавить постоянный член, т. е. если положить

$$S_g = -\frac{c^3}{16\pi k}\int (G + 2\Lambda)\sqrt{-g}\,d\Omega,$$

где Λ — новая постоянная (с размерностью см$^{-2}$). Такое изменение приведет к появлению в уравнениях Эйнштейна дополнительного члена Λg_{ik}:

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = \frac{8\pi k}{c^4}T_{ik} + \Lambda g_{ik}.$$

Если приписать «космологической постоянной» Λ очень малое значение, то наличие этого члена не будет сказываться существенным образом на гравитационных полях в не слишком больших областях пространства-времени, но приведет к появлению новых типов «космологических решений», которые могли бы описывать мир в целом [1]). В настоящее время, однако, нет никаких настоятельных и убедительных оснований — как наблюдательных, так и теоретических — для такого видоизменения основных уравнений теории. Подчеркнем, что речь шла бы об изменении, имеющем глубокий физический смысл: введение в

[1]) В частности, появляются стационарные решения, отсутствующие при $\Lambda = 0$. Именно с этой целью «космологический член» был введен Эйнштейном до открытия Фридманом нестационарных решений уравнений поля — см. ниже.

плотность лагранжевой функции постоянного члена, вообще не зависящего от состояния поля, означало бы приписывание пространству-времени принципиально неустранимой кривизны, не связанной ни с материей, ни с гравитационными волнами. Все дальнейшее изложение в этой главе основано поэтому на уравнениях Эйнштейна в их «классическом» виде, без космологической постоянной.

Как известно, звезды распределены по пространству весьма неравномерным образом — они сконцентрированы в отдельных звездных системах (галактиках). Но при исследовании Вселенной «в больших масштабах» следует отвлекаться от «местных» неоднородностей, вызванных скоплением вещества в звезды и звездные системы. Так, под плотностью масс должна подразумеваться плотность, усредненная по областям пространства, размеры которых велики по сравнению с расстояниями между галактиками.

Рассматриваемые ниже (в §§ 111—114) решения уравнений Эйнштейна — так называемая изотропная космологическая модель (впервые открытая *А. А. Фридманом* в 1922 г.) — основаны на предположении об однородности и изотропии распределения вещества по пространству. Существующие астрономические данные не противоречат такому предположению[1]), и в настоящее время есть все основания считать, что изотропная модель дает в общих чертах адекватное описание не только современного состояния Вселенной, но и изначительной доли ее эволюции в прошлом. Мы увидим ниже, что основным свойством этой модели является ее нестационарность. Нет сомнения в том, что это свойство («расширяющаяся Вселенная») дает правильное объяснение фундаментального для космологической проблемы явления красного смещения (§ 114).

В то же время ясно, что предположение об однородности и изотропии Вселенной уже по самому своему существу неизбежно может иметь лишь приближенный характер, поскольку эти свойства заведомо нарушаются при переходе к меньшим масштабам. К вопросу о возможной роли неоднородности Вселенной в различных аспектах космологической проблемы мы вернемся в §§ 115—119.

Однородность и изотропия пространства означают, что можно выбрать такое мировое время, чтобы в каждый его момент метрика пространства была одинаковой во всех точках и по всем направлениям.

Займемся прежде всего изучением метрики изотропного пространства как таковой, не интересуясь пока его возможной зависимостью от времени. Как мы уже делали выше, обозначим

---

[1]) Имеются в виду данные о распределении галактик в пространстве и об изотропии так называемого реликтового радиоизлучения.

трехмерный метрический тензор как $\gamma_{\alpha\beta}$, т. е. напишем элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \tag{111,1}$$

Кривизна пространства полностью определяется его трехмерным тензором кривизны, который мы обозначаем как $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$, в отличие от четырехмерного тензора R_{iklm}. В случае полной изотропии тензор $P_{\alpha\beta\gamma\delta}$ должен, очевидно, выражаться только через метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$, а потому в силу своих свойств симметрии должен иметь вид

$$P_{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda(\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\gamma_{\beta\gamma}), \tag{111,2}$$

где λ — постоянная. Тензор Риччи $P_{\alpha\beta} = P^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$ равен соответственно

$$P_{\alpha\beta} = 2\lambda\gamma_{\alpha\beta}, \tag{111,3}$$

а скалярная кривизна

$$P = 6\lambda. \tag{111,4}$$

Таким образом, свойства кривизны изотропного пространства определяются лишь одной постоянной. Соответственно этому возможны всего три существенных различных случая пространственной метрики: 1) так называемое пространство постоянной положительной кривизны (соответствующее положительным значениям λ), 2) пространство постоянной отрицательной кривизны (соответствующее значениям $\lambda < 0$) и 3) пространство с кривизной, равной нулю ($\lambda = 0$). Из них последнее представляет собой плоское, т. е. евклидово, пространство.

При изучении метрики удобно исходить из геометрической аналогии, рассматривая геометрию изотропного трехмерного пространства как геометрию на заведомо изотропной гиперповерхности (в некотором фиктивном четырехмерном пространстве[1])). Такой поверхностью является гиперсфера; соответствующее ей трехмерное пространство и является пространством положительной постоянной кривизны. Уравнение гиперсферы с радиусом a в четырехмерном пространстве x_1, x_2, x_3, x_4 имеет вид

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = a^2,$$

а элемент длины на ней выражается как

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2.$$

Рассматривая координаты x_1, x_2, x_3 как три пространственные координаты и исключая из dl^2 фиктивную координату x_4 с

[1]) Не имеющем, разумеется, ничего общего с четырехмерным пространством-временем.

помощью первого уравнения, находим элемент пространственного расстояния в виде

$$dl^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + \frac{(x_1 dx_1 + x_3 dx_2 + x_3 dx_3)^2}{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}. \qquad (111,5)$$

Из этого выражения легко вычислить постоянную λ в (111,2). Поскольку нам заранее известно, что тензор $P_{\alpha\beta}$ имеет вид (111,3) во всем пространстве, то достаточно вычислить его только для точек, находящихся вблизи начала координат, где $\gamma_{\alpha\beta}$ равны

$$\gamma_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{x_\alpha x_\beta}{a^2}.$$

Так как первые производные от $\gamma_{\alpha\beta}$, а значит, и величины $\lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ — (ср. задачу 1 § 88) — трехмерные символы Кристоффеля, соответствующие метрике $\gamma_{\alpha\beta}$, — в начале координат обращаются в нуль, то вычисление по общей формуле (92,7) оказывается очень простым и дает в результате

$$\lambda = \frac{1}{a^2}. \qquad (111,6)$$

Величину a можно назвать «радиусом кривизны» пространства. Введем вместо координат x_1, x_2, x_3 соответствующие им «сферические» координаты r, θ, φ. Тогда элемент длины примет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2). \qquad (111,7)$$

Начало координат может быть выбрано в любой точке пространства. Длина окружности в этих координатах равна $2\pi r$, а поверхность сферы $4\pi r^2$. Длина же «радиуса» окружности (или сферы) равна

$$\int_0^r \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}} = a \arcsin \frac{r}{a},$$

т. е. больше r. Таким образом, отношение длины окружности к радиусу в таком пространстве меньше чем 2π.

Другую удобную форму dl^2 имеет в «четырехмерных сферических координатах», получающихся, если ввести вместо координаты r «угол» χ согласно $r = a \sin\chi$ (χ меняется в пределах от 0 до π)[1]. Тогда

$$dl^2 = a^2[d\chi^2 + \sin^2\chi(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2)]. \qquad (111,8)$$

[1]) «Декартовы» координаты x_1, x_2, x_3, x_4 связаны с четырехмерными сферическими координатами a, θ, φ, χ посредством соотношений

$$x_1 = a \sin\chi \sin\theta \cos\varphi, \qquad x_2 = a \sin\chi \sin\theta \sin\varphi.$$
$$x_3 = a \sin\chi \cos\theta, \qquad x_4 = a \cos\chi.$$

Координата χ измеряет расстояние от начала координат, равное $a\chi$. Поверхность сферы в этих координатах равна $4\pi a^2 \sin^2\chi$. Мы видим, что по мере удаления от начала координат величина поверхности сферы увеличивается, пока не достигнет на расстоянии $\pi a/2$ максимального значения, равного $4\pi a^2$. Вслед за этим она начинает уменьшаться, пока не превратится в точку на «противоположном полюсе» пространства на расстоянии πa — наибольшем расстоянии, которое вообще может существовать в таком пространстве (все это видно, конечно, и из (111,7), если заметить, что координата r не может принимать значений, бо́льших чем a).

Объем пространства с положительной кривизной равен

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} a^3 \sin^2\chi \sin\theta \, d\chi \, d\theta \, d\varphi,$$

откуда

$$V = 2\pi^2 a^3. \tag{111,9}$$

Таким образом, пространство положительной кривизны оказывается «замкнутым само в себе» — конечным по объему, но, разумеется, не имеющим границ.

Интересно отметить, что в замкнутом пространстве полный электрический заряд должен быть равен нулю. Действительно, всякая замкнутая поверхность в конечном пространстве с обеих своих сторон охватывает конечные же области пространства. Поэтому поток электрического поля через эти поверхность равен, с одной стороны, полному заряду, находящемуся внутри поверхности, а с другой, — равен находящемуся вне ее заряду, взятому с обратным знаком. Сумма же зарядов с обеих сторон поверхности равна, следовательно, нулю.

Аналогичным образом, из выражения (96,16) 4-импульса в виде интеграла по поверхности следует обращение в нуль полного 4-импульса P^i во всем пространстве.

Перейдем теперь к рассмотрению геометрии пространства, обладающего постоянной отрицательной кривизной. Из (111,6) мы видим, что постоянная λ становится отрицательной, если a мнимо. Поэтому все формулы для пространства отрицательной кривизны можно непосредственно получить из предыдущих, заменив в них a на ia. Другими словами, геометрия пространства отрицательной кривизны получается математически как геометрия на четырехмерной псевдосфере с мнимым радиусом.

Таким образом, постоянная λ равна теперь

$$\lambda = -\frac{1}{a^2}, \tag{111,10}$$

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ имеет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1+\frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2\theta d\varphi^2 + d\theta^2), \qquad (111,11)$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞. Отношение длины окружности к радиусу теперь больше чем 2π. Выражение для dl^2, соответствующее (111,8), получится, если ввести координату χ согласно $r = a\,\mathrm{sh}\,\chi$ (χ меняется здесь от 0 до ∞). Тогда

$$dl^2 = a^2\{d\chi^2 + \mathrm{sh}^2\chi(\sin^2\theta\, d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \qquad (111,12)$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2\,\mathrm{sh}^2\chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объем пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.

Задача

Преобразовать элемент длины (111,7) к виду, в котором он был бы пропорционален своему евклидову выражению (конформно-евклидовы координаты).

Решение. Подстановка

$$r = \frac{r_1}{1+\frac{r_1^2}{4a^2}}$$

приводит к результату:

$$dl^2 = \left(1+\frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2}\left(dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2\sin^2\theta\, d\varphi^2\right).$$

§ 112. Закрытая изотропная модель

Переходя к исследованию пространственно-временной метрики изотропной модели, мы должны прежде всего условиться о выборе системы отсчета. Наиболее удобна «сопутствующая» система отсчета, движущаяся в каждой точке пространства вместе с находящимся в ней веществом. Другими словами, системой отсчета является сама заполняющая пространство материя; скорость вещества в этой системе по определению равна везде нулю. Очевидно, что такой выбор системы отсчета для изотропной модели естествен: при другом выборе направленность скоростей материи создавала бы кажущуюся неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всем пространстве была одинаковой.