

а элемент длины в пространстве отрицательной кривизны в координатах r, θ, φ имеет вид

$$dl^2 = \frac{dr^2}{1 + \frac{r^2}{a^2}} + r^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2), \quad (111,11)$$

где координата r может пробегать все значения от 0 до ∞ . Отношение длины окружности к радиусу теперь больше чем 2π . Выражение для dl^2 , соответствующее (111,8), получится, если ввести координату χ согласно $r = a \sinh \chi$ (χ меняется здесь от 0 до ∞). Тогда

$$dl^2 = a^2 \{d\chi^2 + \sinh^2 \chi (\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)\}. \quad (111,12)$$

Поверхность сферы равна теперь $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$ и при удалении от начала координат (увеличении χ) возрастает неограниченно. Объем пространства отрицательной кривизны, очевидно, бесконечен.

Задача

Преобразовать элемент длины (111,7) к виду, в котором он был бы пропорционален своему евклидову выражению (коинформно-евклидовые координаты).

Решение. Подстановка

$$r = \frac{r_1}{1 + \frac{r_1^2}{4a^2}}$$

приводит к результату:

$$dl^2 = \left(1 + \frac{r_1^2}{4a^2}\right)^{-2} (dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

§ 112. Закрытая изотропная модель

Переходя к исследованию пространственно-временной метрики изотропной модели, мы должны прежде всего условиться о выборе системы отсчета. Наиболее удобна «сопутствующая» система отсчета, движущаяся в каждой точке пространства вместе с находящимся в ней веществом. Другими словами, системой отсчета является сама заполняющая пространство материя; скорость вещества в этой системе по определению равна везде нулю. Очевидно, что такой выбор системы отсчета для изотропной модели естествен: при другом выборе направленность скоростей материи создавала бы кажущуюся неэквивалентность различных направлений в пространстве. Временная координата должна быть выбрана указанным в начале предыдущего параграфа образом, т. е. так, чтобы в каждый данный момент времени метрика во всем пространстве была одинаковой.

Ввиду полной эквивалентности всех направлений, компоненты $g_{0\alpha}$ метрического тензора в выбранной нами системе отсчета равны нулю. Действительно, три компоненты $g_{0\alpha}$ можно рассматривать как компоненты трехмерного вектора, который, будучи отличен от нуля, создавал бы неравнозначность различных направлений. Таким образом, ds^2 должно иметь вид $ds^2 = g_{00}' dx^0)^2 - dl^2$. Компонента g_{00} является здесь функцией только от x^0 . Поэтому можно всегда выбрать временную координату так, чтобы g_{00} обратилось в 1. Обозначая ее через ct , имеем:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2. \quad (112,1)$$

Переменная t является синхронным собственным временем в каждой точке пространства.

Начнем с рассмотрения пространства положительной кривизны; ниже мы будем для краткости говорить о соответствующем решении уравнений Эйнштейна как о *закрытой модели*. Для dl воспользуемся выражением (111,8), в котором радиус кривизны a является, вообще говоря, функцией времени. Таким образом, ds^2 пишем в виде

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\}. \quad (112,2)$$

Функция $a(t)$ определяется уравнениями Эйнштейна. Для решения этих уравнений удобно воспользоваться вместо времени величиной η , определяемой соотношением

$$cdt = ad\eta. \quad (112,3)$$

Тогда ds^2 напишется в виде

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - d\chi^2 - \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\}. \quad (112,4)$$

Для составления уравнений поля надо начать с вычисления компонент тензора R_{ik} (координатами x^0, x^1, x^2, x^3 являются η, χ, θ, ϕ). С помощью значений компонент метрического тензора

$g_{00} = a^2, \quad g_{11} = -a^2, \quad g_{22} = -a^2 \sin^2 \chi, \quad g_{33} = -a^2 \sin^2 \chi \sin^2 \theta$
вычисляем величины Γ_{kl}^i :

$$\Gamma_{00}^0 = \frac{a'}{a}, \quad \Gamma_{0\beta}^0 = -\frac{a'}{a^3} g_{\alpha\beta}, \quad \Gamma_{0\beta}^\alpha = \frac{a'}{a} \delta_\beta^\alpha, \quad \Gamma_{\alpha 0}^0 = \Gamma_{00}^\alpha = 0,$$

где штрих означает дифференцирование по η (компоненты $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ нет надобности вычислять в явном виде). С помощью этих значений по общей формуле (92,7) получим:

$$R_0^0 = \frac{3}{a^4} (a''^2 - aa'').$$

Из тех же соображений симметрии, которые были применены выше к $g_{0\alpha}$, заранее очевидно, что компоненты $R_{0\alpha} = 0$. Для вычисления же компонент R_α^β замечаем, что если выделить в них члены, содержащие только $g_{\alpha\beta}$ (т. е. только $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$), то эти члены

должны составить компоненты трехмерного тензора — P_a^b , значения которых заранее известны из (111,3) и (111,6):

$$R_a^b = -P_a^b + \dots = -\frac{2}{a^2} \delta_a^b + \dots,$$

где многоточие подразумевает члены, содержащие наряду с g_{ab} также и g_{00} . В результате вычисления последних получим:

$$R_a^b = -\frac{1}{a^4} (2a^2 + a'^2 + aa'') \delta_a^b,$$

и затем

$$R = R_0^0 + R_a^a = -\frac{6}{a^3} (a + a'').$$

Поскольку в выбранной нами системе отсчета материя не-подвижна, то $u^a = 0$, $u^0 = 1/a$ и из (94,9) имеем $T_0^0 = \epsilon$, где ϵ — плотность энергии материи. Подставляя полученные выражения в уравнение

$$R_0^0 - \frac{1}{2} R = \frac{8\pi k}{c^4} T_0^0,$$

получим:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \epsilon = \frac{3}{a^4} (a^2 + a'^2). \quad (112,5)$$

Сюда входят две неизвестные функции ϵ и a ; поэтому необходимо получить еще одно уравнение. В качестве него удобно выбрать (вместо пространственных компонент уравнений Эйнштейна) уравнение $T_0^i; i = 0$ — одно из четырех уравнений (94,7), содержащихся, как мы знаем, в уравнениях поля. Это уравнение можно вывести и непосредственно с помощью термодинамических соотношений следующим образом.

Пользуясь в уравнениях поля выражением (94,9) для тензора энергии-импульса, мы тем самым пренебрегаем всеми процессами диссилиации энергии, приводящими к возрастанию энтропии. Такое пренебрежение, разумеется, здесь вполне законно, поскольку дополнительные члены, которые надо было бы прибавить к T_k^i в связи с диссилиацией энергии, ничтожно малы по сравнению с плотностью энергии ϵ , включающей в себя энергию покоя материальных тел.

Таким образом, при выводе уравнений поля мы можем считать полную энтропию постоянной. Воспользуемся теперь известным термодинамическим соотношением $d\mathcal{E} = T dS - p dV$, где \mathcal{E} , S , V — энергия, энтропия и объем системы, а p , T — давление и температура. При постоянной энтропии имеем просто $d\mathcal{E} = -p dV$. Вводя плотность энергии $\epsilon = \mathcal{E}/V$, без труда находим:

$$d\epsilon = -(\epsilon + p) \frac{dV}{V}.$$

Объем пространства V пропорционален, согласно (111,9), кубу радиуса кривизны a . Поэтому $dV/V = 3da/a = 3d \ln a$, и мы можем написать:

$$-\frac{de}{e+p} = 3d \ln a,$$

или, интегрируя,

$$3 \ln a = - \int \frac{de}{p+e} + \text{const} \quad (112,6)$$

(нижний предел в интеграле постоянен).

Если связь между e и p (уравнение состояния материи) известна, то уравнение (112,6) определяет e как функцию от a . Тогда из (112,5) мы можем определить η в виде

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4} ea^2 - 1}}. \quad (112,7)$$

Уравнения (112,6—7) решают в общем виде задачу об определении метрики в изотропной закрытой модели.

Если материя распределена в пространстве в виде отдельных макроскопических тел, то при определении создаваемого ею гравитационного поля мы можем рассматривать эти тела как материальные частицы, обладающие определенными массами, не интересуясь вовсе их внутренним строением. Считая скорости тел сравнительно малыми (малыми по сравнению с c), можно положить просто $e = \mu c^2$, где μ — сумма масс тел, отнесенная к единице объема. По той же причине давление «газа», состоящего из этих тел, крайне мало по сравнению с e и им можно пренебречь (давления же внутри тел, согласно сказанному, не имеют отношения к рассматриваемому вопросу). Что касается имеющегося в пространстве излучения, то его количество относительно мало и его энергией и давлением тоже можно пренебречь.

Таким образом, для описания в терминах рассматриваемой модели современного состояния Вселенной следует пользоваться уравнением состояния «пылевидной» материи

$$e = \mu c^2, \quad p = 0.$$

Интегрирование в (112,6) дает тогда $\mu a^3 = \text{const}$. Это равенство можно было бы написать и сразу, так как оно выражает собой просто постоянство суммы M масс тел во всем пространстве, как и должно было быть в рассматриваемом случае пылевидной материи¹⁾. Поскольку объем пространства в замкнутой

¹⁾ Подчеркнем во избежание недоразумений (при сопоставлении с упомянутым в § 111 равенством нулю полного 4-импульса замкнутого мира), что M есть именно сумма масс тел, взятых по отдельности, без учета их гравитационного взаимодействия.

модели равен $V = 2\pi^2 a^3$, то $\text{const} = M/2\pi^2$. Таким образом,

$$\mu a^3 = \text{const} = \frac{M}{2\pi^2}. \quad (112,8)$$

Подставив (112,8) в уравнение (112,7) и произведя интегрирование, получим:

$$a = a_0(1 - \cos \eta), \quad (112,9)$$

где постоянная

$$a_0 = \frac{2kM}{3\pi c^2}.$$

Наконец, для связи между t и η находим из (112,3):

$$t = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin \eta). \quad (112,10)$$

Уравнения (112,9—10) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$. Функция $a(t)$ возрастает от нуля при $t = 0$ ($\eta = 0$) до максимального значения $a = 2a_0$, достигаемого при $t = \pi a_0/c$ ($\eta = \pi$) и затем снова убывает до нуля при $t = 2\pi a_0/c$ ($\eta = 2\pi$).

При $\eta \ll 1$ имеем приближенно $a = a_0\eta^2/2$, $t = a_0\eta^3/6c$, так что

$$a \approx \left(\frac{9a_0c^2}{2}\right)^{1/3} t^{1/3}. \quad (112,11)$$

При этом плотность вещества

$$\mu = \frac{1}{6\pi k t^2} = \frac{8 \cdot 10^5}{t^2} \quad (112,12)$$

(численное значение коэффициента дано для плотности в г·см⁻³ при t в секундах). Обратим внимание на то, что в этом пределе зависимость $\mu(t)$ имеет универсальный характер в том смысле, что не зависит от параметра a_0 .

При $a \rightarrow 0$ плотность μ обращается в бесконечность. Но при $\mu \rightarrow \infty$ давление тоже становится большим, и потому для исследования метрики в этой области надо рассмотреть противоположный случай наибольшего возможного (при данной плотности энергии ϵ) давления, т. е. описывать материю уравнением состояния

$$p = \frac{\epsilon}{3}$$

(см. примечание на стр. 123). Из формулы (112,6) получим тогда

$$\epsilon a^4 = \text{const} = \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k} \quad (112,13)$$

(a_1 — новая постоянная), после чего уравнения (112,7) и (112,3) приводят к зависимости

$$a = a_1 \sin \eta, \quad t = \frac{a_1}{c} (1 - \cos \eta).$$

Поскольку это решение имеет смысл рассматривать только при очень больших значениях ε (т. е. малых a), то положим $\eta \ll 1$. Тогда $a \approx a_1 \eta$, $t \approx a_1 \eta^2 / 2c$, так что

$$a = \sqrt{2a_1 ct}. \quad (112,14)$$

При этом

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi k t^2} = \frac{4,5 \cdot 10^5}{t^2} \quad (112,15)$$

(эта зависимость снова не содержит никаких параметров).

Таким образом, и здесь $a \rightarrow 0$ при $t \rightarrow 0$, так что значение $t = 0$ действительно является особой точкой пространственно-временной метрики изотропной модели (и то же самое относится к закрытой модели и ко второй точке, в которой $a = 0$). Мы видим также из (112,14), что при изменении знака t величина $a(t)$ сделалась бы мнимой, а ее квадрат — отрицательным. Все четыре компоненты g_{ik} в (112,2) стали бы при этом положительными, так же как и определитель g . Но такая метрика физически бессмысленна. Это значит, что не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за особую точку.

§ 113. Открытая изотропная модель

Решение, соответствующее изотропному пространству отрицательной кривизны (*открытая модель*), получается вполне аналогично предыдущему. Вместо (112,2) имеем теперь

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\}. \quad (113,1)$$

Вводим снова вместо t переменную η согласно $c dt = a d\eta$; тогда получаем:

$$ds^2 = a^2(\eta) \{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)\}. \quad (113,2)$$

Это выражение может быть формально получено из (112,4) заменой η , χ , a соответственно на $i\eta$, $i\chi$, ia . Поэтому и уравнения поля можно получить просто путем этой же замены из (112,5–6). Уравнение (112,6) сохраняет при этом свой прежний вид:

$$3 \ln a = - \int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon + \rho} + \text{const}, \quad (113,3)$$

а вместо (112,5) имеем:

$$\frac{8\pi k}{c^4} \varepsilon = \frac{3}{a^4} (a'^2 - a^2). \quad (113,4)$$

Соответственно этому находим вместо (112,7)

$$\eta = \pm \int \frac{da}{a \sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4} \varepsilon a^2 + 1}}. \quad (113,5)$$