Поскольку это решение имеет смысл рассматривать только при очень больших значениях ε (т. е. малых a), то положим $\eta \ll 1$. Тогда $a \approx a_1\eta$, $t \approx a_1\eta^2/2c$, так что

$$a = \sqrt{2a_1ct}. \tag{112,14}$$

При этом

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{3}{32\pi kt^2} = \frac{4{,}5\cdot 10^5}{t^2} \tag{112,15}$$

(эта зависимость снова не содержит никаких параметров).

Таким образом, и здесь $a \to 0$ при $t \to 0$, так что значение $t = 0$ действительно является особой точкой пространственно-временной метрики изотропной модели (и то же самое относится к закрытой модели и ко второй точке, в которой $a = \theta$). Мы видим также из (112,14), что при изменении знака t величина $a(t)$ сделалась бы мнимой, а ее квадрат — отрицательным. Все четыре компоненты g_{ik} в (112,2) стали бы при этом положительными, так же как и определитель g. Но такая метрика физически бессмысленна. Это значит, что не имеет физического смысла аналитически продолжать метрику за особую точку.

§ 113. Открытая изотропная модель

Решение, соответствующее изотропному пространству отрицательной кривизны (*открытая модель*), получается вполне аналогично предыдущему. Вместо (112,2) имеем теперь

$$ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}. \tag{113,1}$$

Вводим снова вместо t переменную η согласно $c\,dt = a\,d\eta$; тогда получаем:

$$ds^2 = a^2(\eta)\{d\eta^2 - d\chi^2 - \operatorname{sh}^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta)\,d\varphi^2)\}. \tag{113,2}$$

Это выражение может быть формально получено из (112,4) заменой η, χ, a соответственно на $i\eta$, $i\chi$, ia. Поэтому и уравнения поля можно получить просто путем этой же замены из (112,5—6). Уравнение (112,6) сохраняет при этом свой прежний вид:

$$3\ln a = -\int\frac{d\varepsilon}{\varepsilon + p} + \text{const}, \tag{113,3}$$

а вместо (112,5) имеем:

$$\frac{8\pi k}{c^4}\varepsilon = \frac{3}{a^4}(a'^2 - a^2). \tag{113,4}$$

Соответственно этому находим вместо (112,7)

$$\eta = \pm\int\frac{da}{a\sqrt{\frac{8\pi k}{3c^4}\varepsilon a^2 + 1}}. \tag{113,5}$$

Для пылевидной материи получаем отсюда [1]):

$$a = a_0(\operatorname{ch}\eta - 1), \quad t = \frac{a_0}{c}(\operatorname{sh}\eta - \eta), \tag{113,6}$$

$$\mu a^3 = \frac{3c^2}{4\pi k} a_0. \tag{113,7}$$

Формулы (113,6) определяют в параметрическом виде зависимость $a(t)$. В отличие от замкнутой модели, здесь радиус кривизны меняется монотонно, возрастая от нуля при $t = 0$ ($\eta = 0$) до бесконечности при $t \to \infty$ ($\eta \to \infty$). Плотность же материи, соответственно, монотонно убывает от бесконечного значения при $t = 0$ (при $\eta \ll 1$ закон этого убывания дается той же приближенной формулой (112,12), что и в закрытой модели).

Для больших плотностей решение (113,6—7) неприменимо, и надо снова обратиться к случаю $p = \varepsilon/3$. При этом снова получается соотношение

$$\varepsilon a^4 = \text{const} \equiv \frac{3c^4 a_1^2}{8\pi k}, \tag{113,8}$$

а для зависимости $a(t)$ находим:

$$a = a_1 \operatorname{sh}\eta, \quad t = \frac{a_1}{c}(\operatorname{ch}\eta - 1),$$

или при $\eta \ll 1$:

$$a = \sqrt{2a_1 ct} \tag{113,9}$$

(и прежняя формула (112,15) для $\varepsilon(t)$). Таким образом, и в открытой модели метрика имеет особую точку (но в отличие от закрытой модели — лишь одну).

---

[1]) Отметим, что преобразованием

$$r = Ae^{\eta} \operatorname{sh}\chi, \qquad c\tau = Ae^{\eta} \operatorname{ch}\chi,$$

$$Ae^{\eta} = \sqrt{c^2\tau^2 - r^2}, \qquad \operatorname{th}\chi = \frac{r}{c\tau}$$

выражение (113,2) приводится к «конформно-галилееву» виду:

$$ds^2 = f(r, \tau)\,[c^2\,d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)].$$

Конкретно, в случае (113,6) получим (положив $A = a_0/2$):

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a_0}{2\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}}\right)^4 \{c^2\,d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\}$$

(*В. А. Фок*, 1955). При больших значениях $\sqrt{c^2\tau^2 - r^2}$ (чему соответствуют $\eta \gg 1$) эта метрика стремится к галилеевой, что естественно было ожидать ввиду стремления радиуса кривизны к бесконечности.

В координатах r, θ, φ, τ материя не неподвижна, и ее распределение не однородно; при этом распределение и движение материи оказываются центрально-симметричными вокруг произвольной точки пространства, выбранной в качестве начала координат τ, θ, φ.

Наконец, предельным случаем рассмотренных решений, соответствующим бесконечному радиусу кривизны пространства, является модель с плоским (евклидовым) пространством. Интервал ds^2 в этой модели можно написать в виде

$$ds^2 = c^2dt^2 - b^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \qquad (113,10)$$

(в качестве пространственных координат выбраны «декартовы» координаты x, y, z). Зависящий от времени множитель в элементе пространственного расстояния не меняет, очевидно, евклидовости пространственной метрики, так как при заданном t этот множитель постоянен и простым преобразованием координат может быть приведен к единице. Вычисления, аналогичные произведенным в предыдущем параграфе, приводят к следующим уравнениям:

$$\frac{8\pi k}{c^2}\varepsilon = \frac{3}{b^2}\left(\frac{db}{dt}\right)^2, \quad 3\ln b = -\int\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} + \text{const}.$$

Для случая малых давлений находим:

$$\mu b^3 = \text{const}, \quad b = \text{const}\, t^{2/3}. \qquad (113,11)$$

При малых t опять надо рассматривать случай $p = \varepsilon/3$, при котором получаем:

$$\varepsilon b^4 = \text{const}, \quad b = \text{const}\sqrt{t}. \qquad (113,12)$$

Таким образом, и в этом случае метрика имеет особую точку ($t = 0$).

Отметим, что все найденные изотропные решения существуют лишь при отличной от нуля плотности материи; для пустого пространства уравнения Эйнштейна не имеют такого рода решений [1]). Упомянем также, что в математическом отношении они являются частным случаем более общего класса решений, содержащего три физически различные произвольные функции пространственных координат (см. задачу).

Задача

Найти общий вид вблизи особой точки для метрики, в которой расширение пространства происходит «квазиоднородным» образом, т. е. так, что все компоненты $\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta}$ (в синхронной системе отсчета) стремятся к нулю по одинаковому закону. Пространство заполнено материей с уравнением состояния $p = \varepsilon/3$ (*Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, 1960).

---

[1]) При $\varepsilon = 0$ из уравнения (113,5) мы получили бы $a = a_0e^{\eta} = ct$ (уравнение же (112,7) вообще теряет смысл ввиду мнимости корня). Но метрика

$$ds^2 = c^2\,dt^2 - c^2t^2\,\{d\chi^2 + \operatorname{sh}^2\chi\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2)\}$$

преобразованием $r = ct\operatorname{sh}\chi$, $\tau = t\operatorname{ch}\lambda$ приводится к виду

$$ds^2 = c^2\,d\tau^2 - dr^2 - r^2\,(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2),$$

т. е. просто к галилееву пространству-времени.

Решение. Ищем решение вблизи особой точки ($t = 0$) в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = t a_{\alpha\beta} + t^2 b_{\alpha\beta} + \ldots, \tag{1}$$

где $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ — функции координат (пространственных) [1]); ниже полагаем $c = 1$. Обратный тензор

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{1}{t} a^{\alpha\beta} - b^{\alpha\beta},$$

где тензор $a^{\alpha\beta}$ обратен $a_{\alpha\beta}$, а $b^{\alpha\beta} = a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta} b_{\gamma\delta}$; ниже все операции поднимания индексов и ковариантного дифференцирования производятся при помощи не зависящей от времени метрики $a_{\alpha\beta}$.

Вычисляя левые стороны уравнений (97,11) и (97,12) с необходимой точностью по $1/t$, получим:

$$-\frac{3}{4t^2} + \frac{1}{2t} b = \frac{8\pi k}{3} \varepsilon \left(-4u_0^2 + 1\right), \quad \frac{1}{2}\left(b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}\right) = -\frac{32\pi k}{3} \varepsilon u_\alpha u_0$$

(где $b = b^{\alpha}_{\alpha}$). Учитывая также тождество

$$1 = u_i u^i \approx u_0^2 - \frac{1}{t} u_\alpha u_\beta a^{\alpha\beta},$$

найдем:

$$8\pi k \varepsilon = \frac{3}{4t^2} - \frac{b}{2t}, \qquad u_\alpha = -\frac{t^2}{2}\left(b_{;\alpha} - b^{\beta}_{\alpha;\beta}\right). \tag{2}$$

Трехмерные символы Кристоффеля, а с ними и тензор $P_{\alpha\beta}$ в первом по $1/t$ приближении не зависят от времени; при этом $P_{\alpha\beta}$ совпадают с выражениями, получающимися при вычислении с метрикой просто $a_{\alpha\beta}$. Учитывая это, найдем, что в уравнении (97,13) члены порядка t^{-2} взаимно сокращаются, а члены $\sim 1/t$ дают

$$P^{\beta}_{\alpha} + \frac{3}{4} b^{\beta}_{\alpha} + \frac{5}{12} \delta^{\beta}_{\alpha} b = 0,$$

откуда

$$b^{\beta}_{\alpha} = -\frac{4}{3} P^{\beta}_{\alpha} + \frac{5}{18} \delta^{\beta}_{\alpha} P \tag{3}$$

(где $P = a^{\beta\gamma} P_{\beta\gamma}$). Ввиду тождества

$$P^{\beta}_{\alpha;\beta} - \frac{1}{2} P_{;\alpha} = 0$$

(см. (92,10)) имеет место соотношение

$$b^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{7}{9} b_{;\alpha},$$

и потому u_α можно переписать в виде

$$u_\alpha = -\frac{t^2}{9} b_{;\alpha}. \tag{4}$$

Таким образом, все шесть функций $a_{\alpha\beta}$ остаются произвольными, а по ним определяются коэффициенты $b_{\alpha\beta}$ следующего члена разложения (1). Выбор времени в метрике (1) полностью определен условием $t = 0$ в особой точке; пространственные же координаты допускают еще произвольные пре-

---

[1]) Фридмановскому решению отвечает специальный выбор функций $a_{\alpha\beta}$, соответствующий пространству постоянной кривизны.

образования, не затрагивающие времени (ими можно воспользоваться, например, для приведения тензора $a_{\alpha\beta}$ к диагональному виду).

Поэтому полученное решение содержит всего три «физически различные» произвольные функции.

Отметим, что в этом решении пространственная метрика неоднородна и анизотропна, а распределение плотности материи стремится при $t \to 0$ к однородному. Трехмерная скорость $\mathbf{v}$ имеет (в приближении (4)) равный нулю ротор, а ее величина стремится к нулю по закону

$$v^2 = v_\alpha v_\beta \gamma^{\alpha\beta} \sim t^3.$$

§ 114. Красное смещение

Основной характерной чертой всех рассмотренных решений является нестационарность метрики: радиус кривизны пространства является функцией времени. Изменение же радиуса кривизны приводит к изменению всех вообще расстояний между телами в пространстве, как это видно уже из того обстоятельства, что элемент пространственного расстояния dl пропорционален a. Так, при увеличении a в таком пространстве тела «разбегаются» друг от друга (в открытой модели увеличению a соответствуют $\eta > 0$, а в закрытой $0 < \eta < \pi$).

С точки зрения наблюдателя, находящегося на одном из них, дело будет выглядеть так, как если бы остальные тела двигались в радиальных направлениях, удаляясь от наблюдателя. Скорость этого «разбегания» (в данный момент t) сама пропорциональна расстоянию между телами.

Это предсказание теории следует поставить в соответствие с фундаментальным астрономическим фактом — эффектом красного смещения линий в спектрах галактик. Истолковав это смещение как доплеровское, мы приходим к заключению о «разбегании» галактик, т. е. о том, что в настоящее время Вселенная расширяется [1]).

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Для этого проще всего воспользоваться тем, что вдоль мировой линии распространения светового сигнала интервал $ds = 0$. Точку, из которой выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, φ. Из соображений симметрии очевидно, что лучи будут распространяться «радиально», т. е. вдоль линии $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$. Полагая соответственно этому в (112,4) или (113,2) $d\theta = d\varphi = 0$, получим $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$.

---

[1]) Заключение о «разбегании» тел при увеличении $a(t)$ можно сделать, конечно, лишь при условии малости энергии их взаимодействия по сравнению с кинетической энергией их движения при «разбегании»; это условие во всяком случае удовлетворяется для достаточно удаленных галактик. В противном же случае взаимные расстояния тел определяются в основном их взаимодействием; поэтому, например, рассматриваемый эффект практически не должен сказываться на размерах самих туманностей и тем более звезд.