

образования, не затрагивающие времени (ими можно воспользоваться, например, для приведения тензора $a_{\alpha\beta}$ к диагональному виду).

Поэтому полученное решение содержит всего три «физически различные» произвольные функции.

Отметим, что в этом решении пространственная метрика неоднородна и анизотропна, а распределение плотности материи стремится при $t \rightarrow 0$ к однородному. Трехмерная скорость v имеет (в приближении (4)) равный нулю ротор, а ее величина стремится к нулю по закону

$$v^2 = v_\alpha v_\beta g^{\alpha\beta} \sim t^3.$$

§ 114. Красное смещение

Основной характерной чертой всех рассмотренных решений является нестационарность метрики: радиус кривизны пространства является функцией времени. Изменение же радиуса кривизны приводит к изменению всех вообще расстояний между телами в пространстве, как это видно уже из того обстоятельства, что элемент пространственного расстояния dl пропорционален a . Так, при увеличении a в таком пространстве тела «разбегаются» друг от друга (в открытой модели увеличению a соответствуют $\eta > 0$, а в закрытой $0 < \eta < \pi$).

С точки зрения наблюдателя, находящегося на одном из них, дело будет выглядеть так, как если бы остальные тела двигались в радиальных направлениях, удаляясь от наблюдателя. Скорость этого «разбегания» (в данный момент t) сама пропорциональна расстоянию между телами.

Это предсказание теории следует поставить в соответствие с фундаментальным астрономическим фактом — эффектом красного смещения линий в спектрах галактик. Истолковав это смещение как доплеровское, мы приходим к заключению о «разбегании» галактик, т. е. о том, что в настоящее время Вселенная расширяется¹⁾.

Рассмотрим распространение лучей света в изотропном пространстве. Для этого проще всего воспользоваться тем, что вдоль мировой линии распространения светового сигнала интервал $ds = 0$. Точку, из которой выходит луч света, выберем в качестве начала координат χ, θ, ϕ . Из соображений симметрии очевидно, что лучи будут распространяться «радиально», т. е. вдоль линии $\theta = \text{const}, \phi = \text{const}$. Полагая соответственно этому в (112,4) или (113,2) $d\theta = d\phi = 0$, получим $ds^2 = a^2(d\eta^2 - d\chi^2)$.

¹⁾ Заключение о «разбегании» тел при увеличении $a(t)$ можно сделать, конечно, лишь при условии малости энергии их взаимодействия по сравнению с кинетической энергией их движения при «разбегании»; это условие во всяком случае удовлетворяется для достаточно удаленных галактик. В противном же случае взаимные расстояния тел определяются в основном их взаимодействием; поэтому, например, рассматриваемый эффект практически не должен сказываться на размерах самих туманностей и тем более звезд.

Приравнивая нулю, находим $d\eta = \pm d\chi$ или, интегрируя:

$$\chi = \pm \eta + \text{const.} \quad (114,1)$$

Знак плюс перед η соответствует лучу, распространяющемуся по направлению от начала координат, а знак минус — лучу, проходящему в начало координат. В таком виде уравнение (114,1) применимо к распространению лучей как в открытой, так и в закрытой моделях. С помощью формул предыдущих параграфов можно выразить отсюда проходимое лучом расстояние как функцию времени.

В открытой модели луч света, вышедший из некоторой точки, по мере своего распространения неограниченно удаляется от нее. В закрытой же модели вышедший из исходной точки луч света в конце концов может дойти до «противоположного полюса» пространства (чему соответствует изменение χ от 0 до π); при дальнейшем распространении луч начнет приближаться к исходной точке. Обходу луча «вокруг пространства» и возвращению в исходную точку соответствовало бы изменение χ от 0 до 2π . Из (114,1) мы видим, что при этом и η должно было бы измениться на 2π , что, однако, невозможно (за исключением одного случая — выхода луча в момент, соответствующий $\eta = 0$). Таким образом, луч не мог бы успеть возвратиться в исходную точку, обойдя «вокруг пространства».

Лучу, приходящему в точку наблюдения (начало координат), соответствует уравнение (114,1) со знаком минус перед η . Если момент прихода луча в эту точку есть $t(\eta_0)$, то при $\eta = \eta_0$ должно быть $\chi = 0$, так что уравнение распространения таких лучей имеет вид

$$\chi = \eta_0 - \eta. \quad (114,2)$$

Отсюда видно, что к наблюдателю, находящемуся в точке $\chi = 0$, могут дойти к моменту времени $t(\eta_0)$ лучи, вышедшие из точек, находящихся на «расстояниях», не превышающих $\chi = \eta_0$.

Этот результат, относящийся как к открытой, так и к закрытой моделям, весьма существен. В каждый момент времени $t(\eta)$ в данной точке пространства физическому наблюдению доступно не все пространство, а лишь его часть, соответствующая $\chi \leq \eta$. С математической точки зрения «видимая область» пространства-времени световым конусом. Это сечение оказывается конечным как для открытой, так и для закрытой моделей (бесконечным же в открытой модели является сечение гиперповерхностью $t = \text{const}$, соответствующее пространству, рассматриваемому во всех своих точках в один и тот же момент времени t). В этом смысле разница между открытой и закрытой моделями оказывается менее глубокой, чем это могло бы на первый взгляд показаться.

Чем более удалена от наблюдателя наблюдаемая им в данный момент времени область пространства, тем более ранним моментам времени она соответствует. Представим себе сферическую поверхность, являющуюся геометрическим местом точек, из которых свет вышел в момент времени $t(\eta - \chi)$ и наблюдается в начале координат в момент $t(\eta)$. Площадь этой поверхности равна $4\pi a^2(\eta - \chi) \sin^2 \chi$ (в закрытой модели) или $4\pi a^2(\eta - \chi) \sin^2 \chi$ (в открытой модели). По мере удаления от наблюдателя площадь «видимой сферы» сначала возрастает от нуля (при $\chi = 0$), затем достигает максимума, после чего снова уменьшается, обращаясь в нуль при $\chi = \eta$ (где $a(\eta - \chi) = a(0) = 0$). Это значит, что сечение световым конусом не только конечно, но и замкнуто. Оно как бы замыкается в точке, «противоположной» наблюдателю; ее можно увидеть при наблюдении в любом направлении в пространстве. В этой точке $\varepsilon \rightarrow \infty$, так что наблюдению доступна, в принципе, материя на всех ступенях ее эволюции.

Полное наблюдаемое количество материи равно в открытой модели интегралу

$$M_{\text{набл}} = 4\pi \int_0^\eta \mu a^3 \sin^2 \chi d\chi.$$

Подставив μa^3 из (113,7), получим:

$$M_{\text{набл}} = \frac{3c^2 a_0}{2k} (\sinh \eta \cosh \eta - \eta). \quad (114,3)$$

Эта величина неограниченно возрастает при $\eta \rightarrow \infty$. В закрытой же модели возрастание $M_{\text{набл}}$ ограничено, разумеется, полной массой M ; аналогичным образом получим в этом случае:

$$M_{\text{набл}} = \frac{M}{\pi} (\eta - \sin \eta \cos \eta). \quad (114,4)$$

По мере возрастания η от 0 до π эта величина возрастает от 0 до M ; в дальнейшем же увеличение $M_{\text{набл}}$ согласно полученной формуле фиктивно и соответствует просто тому, что в «сжимающемся» мире удаленные тела наблюдались бы дважды (по свету, «обошедшему пространство» с двух сторон).

Рассмотрим теперь изменение частоты света при его распространении в изотропном пространстве. Для этого замечаем предварительно следующее обстоятельство. Пусть в некоторой точке пространства происходят два события, разделенные промежутком времени $dt = a(\eta) d\eta/c$. Если в моменты этих событий отправляются световые сигналы, наблюдаемые в другой точке пространства, то между моментами их наблюдения пройдет промежуток времени, соответствующий тому же изменению $d\eta$ величины η , что и в точке отправления. Это следует непосред-

ственно из уравнения (114,1), согласно которому изменение величины η за время распространения луча света из одной точки в другую зависит только от разности координат χ этих точек. Но поскольку за время распространения сигнала радиус кривизны a изменится, то промежутки времени t между моментами отправления двух сигналов и моментами их наблюдения будут различными; отношение этих промежутков равно отношению соответствующих значений a .

Отсюда следует, в частности, что и периоды световых колебаний, измеренные в мировом времени t , меняются вдоль луча пропорционально a . Частота же света будет, очевидно, обратно пропорциональна a . Таким образом, при распространении луча света вдоль него постоянно произведение

$$\omega a = \text{const.} \quad (114,5)$$

Предположим, что в момент времени $t(\eta)$ мы наблюдаем свет, излученный источником, находящимся на расстоянии, соответствующем определенному значению координаты χ . Моментом испускания этого света является, согласно (114,1), момент $t(\eta - \chi)$. Если ω_0 есть частота света в момент его испускания, то наблюдаемая нами частота ω равна, согласно (114,5),

$$\omega = \omega_0 \frac{a(\eta - \chi)}{a(\eta)}. \quad (114,6)$$

При монотонно возрастающей функции $a(\eta)$ имеем $\omega < \omega_0$, т. е. происходит уменьшение частоты света. Это значит, что при наблюдении спектра приходящего света все его линии должны оказаться смещенными в красную сторону по сравнению со спектрами тех же веществ в обычных условиях. Это явление *красного смещения* представляет собой, по существу, эффект Доплера от взаимного «разбегания» галактик.

Величина красного смещения, измеряемая отношением ω/ω_0 сдвинутой частоты к несдвинутой, зависит (при данном моменте наблюдения) от расстояния, на котором находится наблюдаемый источник света (в соотношение (114,6) входит координата χ источника света). При не слишком больших расстояниях можно разложить $a(\eta - \chi)$ в ряд по степеням χ , ограничившись первыми двумя членами:

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1 - \chi \frac{a'(\eta)}{a(\eta)}$$

(штрих означает дифференцирование по η). Далее замечаем, что произведение $\chi a(\eta)$ является здесь не чем иным, как расстоянием l до наблюдаемого источника. Действительно, «радиальный» элемент длины равен $dl = a d\chi$; при интегрировании этого соотношения возникает вопрос о том, каким способом физического наблюдения определяется расстояние,— в зависимости от

этого надо брать значения a в разных точках пути интегрирования в разные моменты времени (интегрирование при $\eta = \text{const}$ соответствовало бы одновременному рассмотрению всех точек пути, что физически неосуществимо). Но при «малых» расстояниях можно пренебречь изменением a вдоль пути интегрирования и написать просто $l = a\chi$ со значением a , взятым в момент наблюдения.

В результате находим для относительной величины изменения частоты (ее обозначают обычно буквой z) следующую формулу:

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} = \frac{H}{c} l, \quad (114,7)$$

где введено обозначение

$$H = c \frac{a'(\eta)}{a^2(\eta)} = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \quad (114,8)$$

для так называемой *постоянной Хаббла*. Эта величина не зависит при заданном моменте наблюдения от l . Таким образом, относительный сдвиг спектральных линий пропорционален расстоянию до наблюдаемого источника света.

Рассматривая красное смещение как результат эффекта Доплера, можно определить скорости v галактик, с которыми они удаляются от наблюдателя. Написав $z = v/c$ и сравнив с (114,7), находим

$$v = Hl \quad (114,9)$$

(эту формулу можно получить и непосредственно, вычисляя производную $v = d(a\chi)/dt$).

Астрономические данные подтверждают закон (114,7), но определение значения постоянной Хаббла затрудняется неопределенностью в установлении масштаба космических расстояний, пригодного для удаленных галактик. Принятое в настоящее время значение H составляет:

$$H \approx 0,8 \cdot 10^{-10} \text{ год}^{-1} = 0,25 \cdot 10^{-17} \text{ с}^{-1}, \frac{1}{H} \approx 4 \cdot 10^{17} \text{ с} = 13 \cdot 10^9 \text{ год} \quad (114,10)$$

Это значение H соответствует увеличению «скорости разбегания» на 75 км/с на каждый мегапарсек расстояния¹⁾.

Подставляя в уравнение (113,4) $\varepsilon = \mu c^2$ и $H = ca'/a^2$, получим для открытой модели следующее соотношение:

$$\frac{c^2}{a^2} = H^2 - \frac{8\pi k}{3} \mu. \quad (114,11)$$

¹⁾ Существуют также оценки, приводящие к меньшему значению H , отвечающему увеличению скорости разбегания на 55 км/с на каждый мегапарсек; при этом $1/H \approx 18 \cdot 10^9$ год.

Комбинируя это уравнение с равенством

$$H = \frac{c \operatorname{sh} \eta}{a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1)^2} = \frac{c}{a} \operatorname{cth} \frac{\eta}{2},$$

получим:

$$\operatorname{ch} \frac{\eta}{2} = H \sqrt{\frac{-3}{8\pi k \mu}}. \quad (114,12)$$

Для закрытой модели аналогичным образом получим:

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{8\pi k}{3} \mu - H^2, \quad (114,13)$$

$$\cos \frac{\eta}{2} = H \sqrt{\frac{3}{8\pi k \mu}}. \quad (114,14)$$

Сравнивая (114,11) и (114,13), мы видим, что кривизна пространства отрицательна или положительна, смотря по тому, отрицательна или положительна разность $8\pi k \mu / 3 - H^2$. Эта разность обращается в нуль при $\mu = \mu_k$, где

$$\mu_k = \frac{3H^2}{8\pi k}. \quad (114,15)$$

Со значением (114,10) получим $\mu_k \approx 1 \cdot 10^{-29}$ г/см³. При современном состоянии астрономических сведений оценка средней плотности материи в пространстве может быть произведена лишь с весьма небольшой точностью. Для оценки, основанной на подсчете числа галактик и на их средней массе, принимают в настоящее время значение около $3 \cdot 10^{-31}$ г/см³. Это значение в 30 раз меньше μ_k и, таким образом, свидетельствовало бы в пользу открытой модели. Однако, не говоря уже о недостаточной достоверности самого этого значения, следует иметь в виду, что в нем не учитывается возможное существование межгалактического темного газа, учет которого мог бы существенно повысить среднюю плотность материи.

Отметим некоторое неравенство, которое оказывается возможным получить при заданном значении величины H . Для открытой модели имеем $H = c \operatorname{sh} \eta / a_0 (\operatorname{ch} \eta - 1)^2$, и отсюда

$$t = \frac{a_0}{c} (\operatorname{sh} \eta - \eta) = \frac{\operatorname{sh} \eta (\operatorname{sh} \eta - \eta)}{H (\operatorname{ch} \eta - 1)^2}.$$

Поскольку $0 < \eta < \infty$, то должно быть

$$\frac{2}{3H} < t < \frac{1}{H}. \quad (114,16)$$

Аналогично для закрытой модели получим:

$$t = \frac{\sin \eta (\eta - \sin \eta)}{H (1 - \cos \eta)^2}.$$

Возрастанию $a(\eta)$ соответствует интервал $0 < \eta < \pi$; поэтому получаем:

$$0 < t < \frac{2}{3H}. \quad (114,17)$$

Далее определим интенсивность I света, доходящего до наблюдателя от источника, находящегося на расстоянии, соответствующем определенному значению координаты χ . Плотность потока световой энергии в точке наблюдения обратно пропорциональна поверхности сферы, проведенной через рассматриваемую точку с центром в точке нахождения источника; в пространстве отрицательной кривизны площадь поверхности сферы равна $4\pi a^2 \sinh^2 \chi$. Свет, испущенный источником в течение времени $dt = a(\eta - \chi) d\eta/c$, будет приходить в точку наблюдения в течение времени $a(\eta) dt/a(\eta - \chi) = a(\eta) d\eta/c$. Поскольку интенсивность определяется как поток световой энергии в единицу времени, то, следовательно, в I появится множитель $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. Наконец, энергия волнового пакета пропорциональна частоте (см. (53,9)); поскольку частота меняется при распространении света по закону (114,5), то это приведет к появлению в I еще одного множителя $a(\eta - \chi)/a(\eta)$. В результате окончательно получаем интенсивность в виде

$$I = \text{const} \cdot \frac{a^2 (\eta - \chi)}{a^4 (\eta) \sinh^2 \chi}. \quad (114,18)$$

Для закрытой модели получилось бы аналогично:

$$I = \text{const} \cdot \frac{a^2 (\eta - \chi)}{a^4 (\eta) \sin^2 \chi}. \quad (114,19)$$

Этими формулами устанавливается зависимость видимой яркости наблюдаемого объекта от его расстояния (при заданной абсолютной яркости). При малых χ можно положить $a(\eta - \chi) \approx \approx a(\eta)$, и тогда $I \sim 1/a^2(\eta) \chi^2 = 1/l^2$, т. е. обычный закон уменьшения интенсивности обратно пропорционально квадрату расстояния.

Наконец, рассмотрим вопрос о так называемых собственных движениях тел. Говоря о плотности и движении материи, мы всегда подразумевали усредненную плотность и усредненное движение; в частности, в той системе отсчета, которой мы все время пользуемся, скорость усредненного движения равна нулю. Истинные же скорости тел обнаруживают некоторый разброс вокруг своего среднего значения. С течением времени скорости собственного движения тел меняются. Для определения закона этого изменения рассмотрим свободно движущееся тело и выберем начало координат в какой-либо точке его траектории. Тогда траекторией будет являться радиальная линия $\theta = \text{const}$,

$\varphi = \text{const}$. Уравнение Гамильтона — Якоби (87,6) после подстановки значений g^{ik} примет вид

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2 + m^2 c^2 a^2(\eta) = 0. \quad (114,20)$$

Поскольку в коэффициенты этого уравнения χ не входит (т. е. координата χ циклична), то имеет место закон сохранения $\partial S / \partial \chi = \text{const}$. Импульс же p движущегося тела равен, по общему определению, $p = \partial S / \partial l = \partial S / \partial \dot{\chi}$. Таким образом, при движении тела остается постоянным произведение

$$p a = \text{const}. \quad (114,21)$$

Вводя скорость v собственного движения тела согласно

$$p = m v / \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

получим:

$$\frac{v a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const}. \quad (114,22)$$

Этим соотношением определяется закон изменения скоростей со временем. По мере возрастания a скорости v монотонно падают.

Задачи

1. Найти первые два члена разложения видимой яркости галактики как функции ее красного смещения; абсолютная яркость галактики меняется со временем по экспоненциальному закону $I_{abc} = \text{const} \cdot e^{at}$ (*H. Robertson*, 1955).

Решение. Зависимость видимой яркости туманности, наблюдаемой в «момент» η , от расстояния χ дается (для открытой модели) формулой

$$I = \text{const} \cdot e^{a[t(\eta-\chi)-t(\eta)]} \frac{a^2(\eta-\chi)}{a^4(\eta) \sin^2 \chi}.$$

Красное смещение, определенное согласно (114,7):

$$z = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega} = \frac{a(\eta) - a(\eta - \chi)}{a(\eta - \chi)}.$$

Разлагая I и z по степеням χ (с функциями $a(\eta)$ и $t(\eta)$ из (112,9—10)) и исключая затем χ из получающихся выражений, находим в результате:

$$I = \text{const} \cdot \frac{1}{z^2} \left[1 - \left(1 - \frac{q}{2} + \frac{a}{H} \right) z \right],$$

где введено обозначение

$$q = \frac{2}{1 + \cos \eta} = \frac{\mu}{\mu_k} > 1.$$

Для открытой модели получается такая же формула с

$$q = \frac{2}{1 + \operatorname{ch} \eta} = \frac{\mu}{\mu_k} < 1.$$

2. Найти первые члены разложения числа галактик, находящихся внутри «сферы» заданного радиуса, как функции от красного смещения на гра-

нице сферы (пространственное распределение галактик предполагается однородным).

Решение. Число N галактик, находящихся на «расстоянии» $\leqslant \chi$, есть (в закрытой модели)

$$N = \text{const} \cdot \int_0^\chi \sin^2 \chi \, d\chi \approx \text{const} \cdot \chi^3.$$

Подставляя сюда первые два члена разложения функции $\chi(z)$, получим:

$$N = \text{const} \cdot z^3 \left[1 - \frac{3}{4} (2 + q) z \right].$$

В таком виде эта формула справедлива и для открытой модели.

§ 115. Гравитационная устойчивость изотропного мира

Рассмотрим вопрос о поведении малых возмущений в изотропной модели, т. е. о ее гравитационной устойчивости (Е. М. Лифшиц, 1946). При этом мы ограничимся рассмотрением возмущений в сравнительно небольших областях пространства — областях, линейные размеры которых малы по сравнению с радиусом a ¹⁾.

В каждой такой области пространственная метрика может быть принята в первом приближении евклидовой, т. е. метрика (111,8) или (111,12) заменится метрикой

$$dl^2 = a^2(\eta) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (115,1)$$

где x, y, z — декартовы координаты, измеренные в единицах радиуса a . В качестве временной координаты будем по-прежнему пользоваться переменной η .

Без ограничения общности, будем описывать возмущенное поле по-прежнему в синхронной системе отсчета, т. е. наложим на изменения δg_{ik} метрического тензора условия $\delta g_{00} = \delta g_{0a} = 0$. Варьируя при этих условиях тождество $g_{ik} u^i u^k = 1$ (и имея в виду, что невозмущенные значения компонент 4-скорости материи $u^0 = 1/a$, $u^a = 0$ ²⁾), получим $g_{00} \delta u^0 = 0$, откуда $\delta u^0 = 0$. Возмущения же δu^a , вообще говоря, отличны от нуля, так что система отсчета — уже не сопутствующая.

Возмущения пространственного метрического тензора обозначим посредством $h_{ab} = \delta g_{ab} = -\delta g_{ab}$. Тогда $\delta g^{ab} = -h^{ab}$, причем поднимание индексов у h_{ab} осуществляется с помощью невозмущенной метрики g_{ab} .

¹⁾ Более подробное изложение вопроса, в том числе исследование возмущений в областях сравнимых с a размеров — см. Е. М. Лифшиц, УФН 80, 411 (1963); Adv. of Phys. 12, 208 (1963).

²⁾ Невозмущенные значения величин мы будем обозначать в этом параграфе буквами без дополнительного индекса (0).