нице сферы (пространственное распределение галактик предполагается однородным).

Решение. Число N галактик, находящихся на «расстоянии» $\leqslant\chi$, есть (в закрытой модели)

$$N = \text{const} \cdot \int_0^{\chi} \sin^2\chi\, d\chi \approx \text{const} \cdot \chi^3.$$

Подставляя сюда первые два члена разложения функции $\chi(z)$, получим:

$$N = \text{const} \cdot z^3\left[1 - \frac{3}{4}(2+q)\,z\right].$$

В таком виде эта формула справедлива и для открытой модели.

§ 115. Гравитационная устойчивость изотропного мира

Рассмотрим вопрос о поведении малых возмущений в изотропной модели, т. е. о ее гравитационной устойчивости (*Е. М. Лифшиц*, 1946). При этом мы ограничимся рассмотрением возмущений в сравнительно небольших областях пространства — областях, линейные размеры которых малы по сравнению с радиусом a [1]).

В каждой такой области пространственная метрика может быть принята в первом приближении евклидовой, т. е. метрика (111,8) или (111,12) заменится метрикой

$$dl^2 = a^2(\eta)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2), \qquad (115,1)$$

где x, y, z — декартовы координаты, измеренные в единицах радиуса a. В качестве временной координаты будем по-прежнему пользоваться переменной η.

Без ограничения общности, будем описывать возмущенное поле по-прежнему в синхронной системе отсчета, т. е. наложим на изменения δg_{ik} метрического тензора условия $\delta g_{00} = \delta g_{0\alpha} = 0$. Варьируя при этих условиях тождество $g_{ik}u^iu^k = 1$ (и имея в виду, что невозмущенные значения компонент 4-скорости материи $u^0 = 1/a$, $u^\alpha = 0$ [2])), получим $g_{00}u^0\delta u^0 = 0$, откуда $\delta u^0 = 0$. Возмущения же δu^α, вообще говоря, отличны от нуля, так что система отсчета — уже не сопутствующая.

Возмущения пространственного метрического тензора обозначим посредством $h_{\alpha\beta} = \delta\gamma_{\alpha\beta} = -\delta g_{\alpha\beta}$. Тогда $\delta\gamma^{\alpha\beta} = -h^{\alpha\beta}$, причем поднимание индексов у $h_{\alpha\beta}$ осуществляется с помощью невозмущенной метрики $\gamma_{\alpha\beta}$.

---

[1]) Более подробное изложение вопроса, в том числе исследование возмущений в областях сравнимых с a размеров — см. *Е. М. Лифшиц*, УФН 80, 411 (1963); Adv. of Phys. 12, 208 (1963).

[2]) Невозмущенные значения величин мы будем обозначать в этом параграфе буквами без дополнительного индекса (0).

В линейном приближении малые возмущения гравитационного поля удовлетворяют уравнениям

$$\delta R_i^k - \frac{1}{2}\delta_i^k \delta R = \frac{8\pi k}{c^4}\delta T_i^k. \qquad (115{,}2)$$

В сихронной системе отсчета вариации компонент тензора энергии-импульса (94,9) равны:

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \delta p, \quad \delta T_0^\alpha = a(p+\varepsilon)\delta u^\alpha, \quad \delta T_0^0 = \delta\varepsilon. \qquad (115{,}3)$$

Ввиду малости $\delta\varepsilon$ и δp можно написать $\delta p = \frac{dp}{d\varepsilon}\delta\varepsilon$, и мы получаем соотношения

$$\delta T_\alpha^\beta = -\delta_\alpha^\beta \frac{dp}{d\varepsilon}\delta T_0^0. \qquad (115{,}4)$$

Формулы для δR_i^k можно получить варьированием выражений (97,10). Поскольку невозмущенный метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta} = a^2\delta_{\alpha\beta}$, то невозмущенные значения

$$\varkappa_{\alpha\beta} = \frac{2\dot a}{a}\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2a'}{a^2}\gamma_{\alpha\beta}, \quad \varkappa_\alpha^\beta = \frac{2a'}{a^2}\delta_\alpha^\beta,$$

где точка означает дифференцирование по ct, а штрих — по η. Возмущения же величин $\varkappa_{\alpha\beta}$ и $\varkappa_\alpha^\beta = \varkappa_{\alpha\gamma}\gamma^{\gamma\beta}$:

$$\delta\varkappa_{\alpha\beta} = \dot h_{\alpha\beta} = \frac{1}{a}h'_{\alpha\beta}, \quad \delta\varkappa_\alpha^\beta = -h^{\beta\gamma}\varkappa_{\alpha\gamma} + \gamma^{\beta\gamma}\dot h_{\alpha\gamma} = \dot h_\alpha^\beta = \frac{1}{a}h_\alpha^{\beta\prime},$$

где $h_\alpha^\beta = \gamma^{\beta\gamma}h_{\alpha\gamma}$. Невозмущенные значения трехмерного тензора P_α^β для евклидовой метрики (115,1) равны нулю. Вариации же δP_α^β вычисляются по формулам (108,3—4); очевидно, что δP_α^β выражается через $\delta\gamma_{\alpha\beta}$ так же, как 4-тензор δR_{ik} выражается через δg_{ik}, причем все тензорные операции производятся в трехмерном пространстве с метрикой (115,1); ввиду евклидовости этой метрики все ковариантные дифференцирования сводятся к простым дифференцированиям по координатам x^α (контравариантные же дифференцирования — еще и к делению на a^2). Имея все это в виду (и переходя везде от производных по t к производным по η), получим после простого вычисления:

$$\delta R_\alpha^\beta = -\frac{1}{2a^2}\left(h^{\gamma,\ \beta}_{\alpha,\ \gamma} + h^{\beta,\ \gamma}_{\gamma,\ \alpha} - h^{\beta,\ \gamma}_{\gamma\alpha} - h^{,\ \beta}_{,\ \alpha}\right) - \frac{1}{2a^2}h_\alpha^{\beta\prime\prime} - \frac{a'}{a^3}h_\alpha^{\beta\prime} - \frac{a'}{2a^3}h'\delta_\alpha^\beta, \qquad (115{,}5)$$

$$\delta R_0^0 = -\frac{1}{2a^2}h'' - \frac{a'}{2a^3}h', \quad \delta R_0^\alpha = \frac{1}{2a^2}\left(h^{,\ \alpha} - h_\beta^{\alpha,\ \beta}\right)'$$

($h \equiv h_\alpha^\alpha$). Здесь как нижние, так и верхние индексы после запятой означают простые дифференцирования по координатам x^α (мы продолжаем писать индексы вверху и внизу лишь для сохранения единообразия обозначений).

Окончательные уравнения для возмущения h_α^β мы получим, подставив в (115,4) компоненты δT_i^k, выраженные через δR_i^k согласно (115,2). В качестве этих уравнений удобно выбрать уравнения, получающиеся из (115,4) при $\alpha \neq \beta$ и при упрощении по индексам α, β. Они гласят:

$$\begin{gathered}(h_{\alpha,\ \gamma}^{\gamma,\ \beta}+h_{\gamma,\ \alpha}^{\beta,\ \gamma}-h'^{\ \beta}_{,\ \alpha}-h_{\alpha,\ \gamma}^{\beta,\ \gamma})+h_\alpha^{\beta''}+2\frac{a'}{a}h_\alpha^{\beta'}=0,\quad \alpha\neq\beta,\\ \frac{1}{2}(h_{\gamma,\ \delta}^{\delta,\ \gamma}-h'^{\ \gamma}_{,\ \gamma})\left(1+3\frac{dp}{d\varepsilon}\right)+h''+h'\frac{a'}{a}\left(2+3\frac{dp}{d\varepsilon}\right)=0.\end{gathered}\tag{115,6}$$

Возмущения плотности и скорости материи могут быть определены по известным h_α^β с помощью формул (115,2—3). Так, для относительного изменения плотности имеем:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon}=\frac{c^4}{8\pi k\varepsilon}\left(\delta R_0^0-\frac{1}{2}\delta R\right)=\frac{c^4}{16\pi k\varepsilon a^2}\left(h_{\alpha,\ \beta}^{\beta,\ \alpha}-h'^{\ \alpha}_{,\ \alpha}+\frac{2a'}{a}h'\right).\tag{115,7}$$

Среди решений уравнений (115,6) есть такие, которые могут быть исключены простым преобразованием системы отсчета (не нарушающим ее синхронности) и поэтому не представляют собой реального физического изменения метрики. Вид таких решений может быть заранее установлен с помощью полученных в задаче 3 § 97 формул (1) и (2). Подставив в них невозмущенные значения $\gamma_{\alpha\beta}=a^2\delta_{\alpha\beta}$, получим следующие выражения для фиктивных возмущений метрики:

$$h_\alpha^\beta=f_{0,\ \alpha}^{\ \ \beta}\int\frac{d\eta}{a}+\frac{a'}{a^2}f_0\delta_\alpha^\beta+(f_\alpha{}'^{\ \beta}+f^\beta{}_{,\ \alpha}),\tag{115,8}$$

где f_0, f_α — произвольные (малые) функции координат x, y, z.

Поскольку метрика в рассматриваемых нами небольших областях пространства предполагается евклидовой, то произвольное возмущение в каждой такой области может быть разложено по плоским волнам. Понимая под x, y, z декартовы координаты, измеренные в единицах a, мы можем написать пространственный периодический множитель плоских волн в виде $e^{i\mathbf{nr}}$, где $\mathbf{n}$ — безразмерный вектор, представляющий собой волновой вектор, измеренный в единицах $1/a$ (волновой вектор $\mathbf{k}=\mathbf{n}/a$). Если мы имеем возмущение в участке пространства с размерами $\sim l$, то в его разложение войдут в основном волны с длинами $\lambda=2\pi a/n\sim l$. Ограничиваясь возмущениями в областях с размерами $l\ll a$, мы тем самым предполагаем число n достаточно большим ($n\gg 2\pi$).

Гравитационные возмущения можно разделить на три типа. Эта классификация сводится к определению возможных типов плоских волн, в виде которых может быть представлен симметричный тензор $h_{\alpha\beta}$. Таким образом получим следующую классификацию:

1. С помощью скалярной функции

$$Q = e^{i\mathbf{nr}} \tag{115,9}$$

можно составить вектор $\mathbf{P} = \mathbf{n}Q$ и тензоры [1])

$$Q_\alpha^\beta = \frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta Q, \quad P_\alpha^\beta = \left(\frac{1}{3}\delta_\alpha^\beta - \frac{n_\alpha n^\beta}{n^2}\right)Q. \tag{115,10}$$

Таким плоским волнам отвечают возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывают изменения также скорость и плотность материи, т. е. мы имеем дело с возмущениями, сопровождающимися возникновением сгущений или разрежений материи. Возмущение h_α^β выражается при этом через тензоры Q_α^β и P_α^β, возмущение скорости — через вектор $\mathbf{P}$, а возмущение плотности — через скаляр Q.

2. С помощью поперечной векторной волны

$$\mathbf{S} = \mathbf{s}e^{i\mathbf{nr}}, \quad \mathbf{sn} = 0, \tag{115,11}$$

можно составить тензор $(n^\beta S_\alpha + n_\alpha S^\beta)$; соответствующего же скаляра не существует, поскольку $\mathbf{nS} = 0$. Этим волнам отвечают возмущения, в которых наряду с гравитационным полем испытывает изменение скорость, но не плотность материи; их можно назвать вращательными возмущениями.

3. Поперечная тензорная волна

$$G_\alpha^\beta = g_\alpha^\beta e^{i\mathbf{nr}}, \quad g_\alpha^\beta n_\beta = 0. \tag{115,12}$$

С ее помощью нельзя составить ни вектора, ни скаляра. Этим волнам отвечают возмущения гравитационного поля, при которых материя остается неподвижной и однородно распределенной в пространстве. Другими словами, это — гравитационные волны в изотропном мире.

Наиболее интересны возмущения первого типа. Полагаем

$$h_\alpha^\beta = \lambda(\eta) P_\alpha^\beta + \mu(\eta) Q_\alpha^\beta, \quad h = \mu Q. \tag{115,13}$$

Из (115,7) получим для относительного изменения плотности

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{c^4}{24\pi k\varepsilon a^2}\left[n^2(\lambda+\mu) + \frac{3a'}{a}\mu'\right]Q. \tag{115,14}$$

Уравнения, определяющие функции λ и μ, получаются подстановкой (115,13) в (115,6):

$$\begin{gathered}\lambda'' + 2\frac{a'}{a}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0,\\ \mu'' + \mu'\frac{a'}{a}\left(2 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) + \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu)\left(1 + 3\frac{dp}{d\varepsilon}\right) = 0.\end{gathered} \tag{115,15}$$

[1]) Мы пишем верхние и нижние индексы у компонент обычного декартового вектора n лишь для сохранения единообразия обозначений.

Эти уравнения имеют прежде всего следующие два частных интеграла, соответствующие тем фиктивным изменениям метрики, которые могут быть исключены преобразованием системы отсчета:

$$\lambda = -\mu = \text{const}, \tag{115,16}$$

$$\lambda = -n^2\int\frac{d\eta}{a}, \quad \mu = n^2\int\frac{d\eta}{a} - \frac{3a'}{a^2} \tag{115,17}$$

(первый из них получается из (115,8) выбором $f_0 = 0$, $f_\alpha = P_\alpha$, второй — выбором $f_0 = Q$, $f_\alpha = 0$).

На ранних стадиях расширения мира, когда материя описывается уравнением состояния $p = \varepsilon/3$, имеем $a \approx a_1\eta$, $\eta \ll 1$ (как в открытой, так и в закрытой моделях). Уравнения (115,15) принимают вид

$$\lambda'' + \frac{2}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \quad \mu'' + \frac{3}{\eta}\mu' + \frac{2n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0. \tag{115,18}$$

Исследование этих уравнений удобно производить раздельно для двух предельных случаев в зависимости от взаимного соотношения между двумя большими величинами n и $1/\eta$.

Предположим сначала, что число n не слишком велико (или η достаточно мало), так что $n\eta \ll 1$. С той точностью, с которой справедливы уравнения (115,18), находим из них в данном случае:

$$\lambda = \frac{3C_1}{\eta} + C_2\left(1 + \frac{n^2}{9}\eta^2\right), \quad \mu = -\frac{2n^2}{3}C_1\eta + C_2\left(1 - \frac{n^2}{6}\eta^2\right),$$

где C_1, C_2 — постоянные; отсюда исключены решения вида (115,16) и (115,17) (в данном случае это — решение, в котором $\lambda = -\mu = \text{const}$ и в котором $\lambda + \mu \sim 1/\eta^2$). Вычислив также $\delta\varepsilon/\varepsilon$ согласно (115,14) и (112,15), получим следующие выражения для возмущений метрики и плотности:

$$h_\alpha^\beta = \frac{3C_1}{\eta}P_\alpha^\beta + C_2(Q_\alpha^\beta + P_\alpha^\beta),$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{n^2}{9}(C_1\eta + C_2\eta^2)Q \text{ при } p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \eta \ll \frac{1}{n}. \tag{115,19}$$

Постоянные C_1, C_2 должны удовлетворять определенным условиям, выражающим малость возмущения в момент η_0 его возникновения: должно быть $h_\alpha^\beta \ll 1$ (откуда $\lambda \ll 1$, $\mu \ll 1$) и $\delta\varepsilon/\varepsilon \ll 1$. В применении к (115,19) эти условия приводят к неравенствам $C_1 \ll \eta_0$, $C_2 \ll 1$.

В выражениях (115,19) имеются члены, возрастающие в расширяющемся мире как различные степени радиуса $a = a_1\eta$. Однако это возрастание не приводит к тому, чтобы возмущение

могло стать большим: если применить формулы (115,19) по порядку величины при $\eta \sim 1/n$, то мы увидим, что (в силу полученных выше неравенств для C_1, C_2) возмущения остаются малыми даже на верхнем пределе действия этих формул.

Пусть теперь число n настолько велико, что $n\eta \gg 1$. Решая уравнения (115,18) при этом условии, найдем, что главные члены в λ и μ равны [1]):

$$\lambda = -\frac{\mu}{2} = \text{const}\,\frac{1}{\eta^2}\,e^{in\eta/\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим для возмущений метрики и плотности:

$$h_\alpha^\beta = \frac{C}{n^2\eta^2}\left(P_\alpha^\beta - 2Q_\alpha^\beta\right)e^{in\eta/\sqrt{3}},\quad \frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{C}{9}Qe^{in\eta/\sqrt{3}}$$

$$\text{при } p=\frac{\varepsilon}{3},\quad \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \tag{115,20}$$

где C — комплексная постоянная, удовлетворяющая условию $|C| \ll 1$. Наличие периодического множителя в этих выражениях вполне естественно. При больших n мы имеем дело с возмущением, пространственная периодичность которого определяется большим волновым вектором $k = n/a$. Такие возмущения должны распространяться как звуковые волны со скоростью

$$u = \sqrt{\frac{dp}{d\,(\varepsilon/c^2)}} = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Соответственно временная часть фазы определяется как полагается в геометрической акустике, большим интегралом $\int kudt = n\eta/\sqrt{3}$. Амплитуда относительного изменения плотности остается, как мы видим, постоянной, амплитуды же возмущений метрики при расширении мира убывают как a^{-2} [2]).

Далее, рассмотрим более поздние стадии расширения, когда материя разрежена уже настолько, что можно пренебречь ее давлением ($p = 0$). При этом мы ограничимся здесь лишь случаем малых η, соответствующих тем стадиям расширения, когда радиус a еще очень мал по сравнению с его современным значением, но все же материя уже достаточно разрежена.

---

[1]) Предэкспоненциальный множитель $1/\eta^2$ — первый член разложения по степеням $1/n\eta$. Для его определения в данном случае надо рассматривать одновременно два первых члена разложения (что допускается точностью уравнений (115,18)).

[2]) Легко проверить, что (при $p = \varepsilon/3$) $n\eta \sim L/\lambda$, где $L \sim u/\sqrt{k\varepsilon/c^2}$. Естественно, что характерная длина L, определяющая поведение возмущений с длиной волны $\lambda \ll a$, составляется лишь из «гидродинамических» величин — плотности материи ε/c^2 и скорости звука в ней u (и гравитационной постоянной k). Отметим, что возрастание возмущений имеет место при $\lambda \gg L$ (в (115,19)).

При $p=0$ и $\eta \ll 1$ имеем $a \approx a_0\eta^2/2$ и уравнения (115,15) принимают вид

$$\lambda'' + \frac{4}{\eta}\lambda' - \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0, \quad \mu'' + \frac{4}{\eta}\mu' + \frac{n^2}{3}(\lambda+\mu) = 0.$$

Решение этих уравнений:

$$\lambda + \mu = 2C_1, \quad \lambda - \mu = 2n^2\left(\frac{C_1\eta^2}{15} + \frac{2C_2}{\eta^3}\right).$$

Вычислив также $\delta\varepsilon/\varepsilon$ (с помощью (115,14) и (112,12)), находим:

$$h_\alpha^\beta = C_1(P_\alpha^\beta + Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2C_2}{\eta^3}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{при } \eta \ll \frac{1}{n},$$

$$h_\alpha^\beta = \frac{C_1}{15}n^2\eta^2(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) + \frac{2n^2C_2}{\eta^3}(P_\alpha^\beta - Q_\alpha^\beta) \quad \text{при } \frac{1}{n} \ll \eta \ll 1, \tag{115,21}$$

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = \left(\frac{C_1n^2\eta^2}{30} + \frac{C_2n^2}{\eta^3}\right)Q.$$

Мы видим, что $\delta\varepsilon/\varepsilon$ содержит член, возрастающий пропорционально a [1]). Однако если $n\eta \ll 1$, то $\delta\varepsilon/\varepsilon$ не становится все же большим даже при $\eta \sim 1/n$ в силу условия $C_1 \ll 1$. Если же $\eta n \gg 1$, то при $\eta \sim 1$ относительное изменение плотности становится порядка C_1n^2, между тем как малость начального возмущения требует лишь, чтобы было $C_1n^2\eta_0^2 \ll 1$. Таким образом, хотя возрастание возмущений происходит и медленно, но общее увеличение может быть значительным и в результате возмущение может стать сравнительно большим.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены возмущения второго и третьего из перечисленных выше типов. Однако законы затухания этих возмущений могут быть найдены и без детальных вычислений, исходя из следующих простых соображений.

Если в небольшом участке вещества (с линейными размерами l) имеется вращательное возмущение со скоростью δv, то момент импульса этого участка $\sim (\varepsilon/c^2)l^3 \cdot l \cdot v$. При расширении мира l растет пропорционально a, а ε убывает как a^{-3} (в случае $p=0$) или как a^{-4} (при $p=\varepsilon/3$). В силу сохранения момента имеем поэтому

$$\delta v = \text{const} \text{ при } p = \frac{\varepsilon}{3}, \quad \delta v \propto \frac{1}{a} \text{ при } p = 0. \tag{115,22}$$

Наконец, плотность энергии гравитационных волн должна убывать при расширении мира как a^{-4}. С другой стороны, эта

[1]) Более тщательный анализ с учетом малого давления $p(\varepsilon)$ показывает, что возможность пренебрежения давлением требует соблюдения условия $u\eta n/c \ll 1$ (где $u = c\sqrt{dp/d\varepsilon}$ — малая скорость звука); легко проверить, что и в этом случае оно совпадает с условием $\lambda \gg L$. Таким образом, возрастание возмущений всегда имеет место, если $\lambda \gg L$.

плотность выражается через возмущение метрики как $\sim k^2(h_\alpha^\beta)^2$, где $k = n/a$ — волновой вектор возмущения. Отсюда следует, что амплитуда возмущения типа гравитационной волны убывает со временем как $1/a$.

§ 116. Однородные пространства

Предположение об однородности и изотропии пространства определяет его метрику полностью (оставляя свободным лишь знак кривизны). Значительно больше свободы оставляет предположение об одной только однородности пространства, без какой-либо еще дополнительной симметрии. Рассмотрим вопрос о том, каковы могут быть метрические свойства однородного пространства.

Речь будет идти о метрике пространства, рассматриваемой в заданный момент времени t. При этом предполагается, что пространственно-временная система отсчета выбрана синхронной, так что t есть единое для всего пространства синхронизованное время.

Однородность означает одинаковость метрических свойств во всех точках пространства. Точное определение этого понятия связано с рассмотрением совокупности преобразований координат, которые совмещают пространство само с собой, т. е. оставляют его метрику неизменной: если до преобразования элемент длины

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3)\, dx^\alpha dx^\beta,$$

то после преобразования тот же элемент

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x'^1, x'^2, x'^3)\, dx'^\alpha dx'^\beta$$

с той же функциональной зависимостью $\gamma_{\alpha\beta}$ от новых координат. Пространство однородно, если оно допускает совокупность преобразований (или, как говорят, *группу движений*), позволяющих совместить любую заданную его точку с любой другой точкой. В силу трехмерности пространства очевидно, что для этого различные преобразования группы должны определяться значениями трех независимых параметров.

Так, в евклидовом пространстве однородность выражается инвариантностью метрики по отношению к параллельным переносам (трансляциям) декартовой системы координат. Каждая трансляция определяется тремя параметрами — компонентами вектора смещения начала координат. Все эти преобразования оставляют инвариантными три независимых дифференциала (dx, dy, dz), из которых и строится элемент длины.

В общем случае неевклидова однородного пространства преобразования его группы движений тоже оставляют инвариантными три независимые линейные дифференциальные формы, не