

плотность выражается через возмущение метрики как $\sim k^2(h_a^b)^2$, где $k = n/a$ — волновой вектор возмущения. Отсюда следует, что амплитуда возмущения типа гравитационной волны убывает со временем как $1/a$.

§ 116. Однородные пространства

Предположение об однородности и изотропии пространства определяет его метрику полностью (оставляя свободным лишь знак кривизны). Значительно больше свободы оставляет предположение об одной только однородности пространства, без какой-либо еще дополнительной симметрии. Рассмотрим вопрос о том, каковы могут быть метрические свойства однородного пространства.

Речь будет идти о метрике пространства, рассматриваемой в заданный момент времени t . При этом предполагается, что пространственно-временная система отсчета выбрана синхронной, так что t есть единое для всего пространства синхронизированное время.

Однородность означает одинаковость метрических свойств во всех точках пространства. Точное определение этого понятия связано с рассмотрением совокупности преобразований координат, которые совмещают пространство само с собой, т. е. оставляют его метрику неизменной: если до преобразования элемент длины

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x^1, x^2, x^3) dx^\alpha dx^\beta,$$

то после преобразования тот же элемент

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}(x'^1, x'^2, x'^3) dx'^\alpha dx'^\beta$$

с той же функциональной зависимостью $\gamma_{\alpha\beta}$ от новых координат. Пространство однородно, если оно допускает совокупность преобразований (или, как говорят, группу движений), позволяющих совместить любую заданную его точку с любой другой точкой. В силу трехмерности пространства очевидно, что для этого различные преобразования группы должны определяться значениями трех независимых параметров.

Так, в евклидовом пространстве однородность выражается инвариантностью метрики по отношению к параллельным переносам (трансляциям) декартовой системы координат. Каждая трансляция определяется тремя параметрами — компонентами вектора смещения начала координат. Все эти преобразования оставляют инвариантными три независимых дифференциала (dx, dy, dz), из которых и строится элемент длины.

В общем случае неевклидова однородного пространства преобразования его группы движений тоже оставляют инвариантными три независимые линейные дифференциальные формы, не

сводящиеся, однако, к полным дифференциалам каких-либо координатных функций. Напишем эти формы в виде

$$e_a^{(a)} dx^a, \quad (116,1)$$

где латинский индекс (a) нумерует три независимых реперных вектора (функции координат).

С помощью форм (116,1) инвариантная по отношению к данной группе движений пространственная метрика строится как

$$dl^2 = \eta_{ab} (e_a^{(a)} dx^a) (e_b^{(b)} dx^b), \quad (116,2)$$

т. е. метрический тензор

$$\gamma_{ab} = \eta_{ab} e_a^{(a)} e_b^{(b)}, \quad (116,3)$$

где симметричные по индексам a, b коэффициенты η_{ab} — функции времени.

Таким образом, мы приходим к «триадному» представлению пространственной метрики с помощью тройки реперных векторов; к этому представлению применимы все полученные в § 98 формулы. При этом выбор реперных векторов диктуется свойствами симметрии пространства и, вообще говоря, эти векторы не ортогональны (так что матрица η_{ab} не диагональна).

Как и в § 98, наряду с тройкой векторов $e_a^{(a)}$ введем тройку взаимных с ними векторов $e_{(a)}^a$, для которых

$$e_{(a)}^a e_a^{(b)} = \delta_a^b, \quad e_{(a)}^a e_b^{(a)} = \delta_a^b. \quad (116,4)$$

В трехмерном случае связь между теми и другими векторами может быть представлена в явном виде как

$$e_{(1)} = \frac{1}{v} [e^{(2)} e^{(3)}], \quad e_{(2)} = \frac{1}{v} [e^{(3)} e^{(1)}], \quad e_{(3)} = \frac{1}{v} [e^{(1)} e^{(2)}], \quad (116,5)$$

где

$$v = |e_a^{(a)}| = (e^{(1)} [e^{(2)} e^{(3)}]),$$

а $e_{(a)}$ и $e^{(a)}$ надо понимать как декартовы векторы с компонентами соответственно $e_{(a)}^a$ и $e_a^{(a)}$. Определитель метрического тензора (116,3)

$$\gamma = \eta v^2, \quad (116,6)$$

где η — определитель матрицы η_{ab} .

Инвариантность дифференциальных форм (116,1) означает, что

$$e_a^{(a)}(x) dx^a = e_a^{(a)}(x') dx'^a, \quad (116,7)$$

причем $e_a^{(a)}$ в обеих сторонах равенства — одни и те же функции соответственно от старых и новых координат. Умножив это

равенство на $e_{(a)}^{\beta}(x')$, заменив $dx'^{\beta} = (\partial x'^{\beta}/\partial x^a) dx^a$ и сравнив коэффициенты при одинаковых дифференциалах dx^a , получим

$$\frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^a} = e_{(a)}^{\beta}(x') e_{\alpha}^{(a)}(x). \quad (116,8)$$

Эти равенства представляют собой систему дифференциальных уравнений, определяющих функции $x'^{\beta}(x)$ по заданным реперным векторам¹⁾. Для того чтобы быть интегрируемыми, уравнения (116,8) должны тождественно удовлетворять условиям

$$\frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^a \partial x^y} = \frac{\partial^2 x'^{\beta}}{\partial x^y \partial x^a}.$$

Вычислив производные, получим:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial e_{(a)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(b)}^{\delta}(x') - \frac{\partial e_{(b)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(a)}^{\delta}(x') \right] e_{\gamma}^{(b)}(x) e_{\alpha}^{(a)}(x) = \\ = e_{(a)}^{\beta}(x') \left[\frac{\partial e_{\gamma}^{(a)}(x)}{\partial x^a} - \frac{\partial e_{\alpha}^{(a)}(x)}{\partial x^{\gamma}} \right]. \end{aligned}$$

Умножив обе стороны равенства на $e_{(d)}^{\alpha}(x) e_{(c)}^{\gamma}(x) e_{\beta}^{(f)}(x')$ и перенеся дифференцирования с одних множителей на другие с учетом (116,4), получим в левой стороне:

$$\begin{aligned} e_{\beta}^{(f)}(x') \left[\frac{\partial e_{(d)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(c)}^{\delta}(x') - \frac{\partial e_{(c)}^{\beta}(x')}{\partial x'^{\delta}} e_{(d)}^{\delta}(x') \right] = \\ = e_{(c)}^{\beta}(x') e_{(d)}^{\delta}(x') \left[\frac{\partial e_{\beta}^{(f)}(x')}{\partial x'^{\delta}} - \frac{\partial e_{\delta}^{(f)}(x')}{\partial x'^{\beta}} \right], \end{aligned}$$

а в правой — такое же выражение как функцию от x . Поскольку x и x' произвольны, то эти выражения должны сводиться к постоянным:

$$\left(\frac{\partial e_{\alpha}^{(c)}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial e_{\beta}^{(c)}}{\partial x^{\alpha}} \right) e_{(a)}^{\alpha} e_{(b)}^{\beta} = C_{ab}^c. \quad (116,9)$$

¹⁾ Для преобразований вида $x'^{\beta} = x^{\beta} + \xi^{\beta}$, где ξ^{β} — малые величины, из (116,8) получаются уравнения

$$\frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^a} = \xi^{\gamma} e_{\alpha}^{(a)} \frac{\partial e_{\alpha}^{\beta}}{\partial x^{\gamma}}. \quad (116,8a)$$

Три линейно-независимых решения этих уравнений $\xi_{(b)}^{\beta}$ ($b = 1, 2, 3$) определяют бесконечно малые преобразования группы движений пространства. Векторы $\xi_{(b)}^{\beta}$ называют *векторами Киллинга* (ср. примечание на стр. 350).

Постоянные C^c_{ab} называются *структурными константами* группы. Умножив на $e_{(c)}^\gamma$, можно переписать (116,9) в виде

$$e_{(a)}^a \frac{\partial e_{(b)}^\gamma}{\partial x^\alpha} - e_{(b)}^\beta \frac{\partial e_{(a)}^\gamma}{\partial x^\beta} = C^c_{ab} e_{(c)}^\gamma. \quad (116,10)$$

Это и есть искомые условия однородности пространства. Выражение в левой стороне равенства (116,9) совпадает с определением величин λ^c_{ab} (98,10), которые, таким образом, оказываются постоянными.

По своему определению структурные константы антисимметричны по нижним индексам:

$$C^c_{ab} = -C^c_{ba}. \quad (116,11)$$

Еще одно условие для них можно получить, заметив, что равенство (116,10) эквивалентно правилу коммутации

$$[X_a, X_b] \equiv X_a X_b - X_b X_a = C^c_{ab} X_c \quad (116,12)$$

для линейных дифференциальных операторов¹⁾

$$X_a = e_{(a)}^a \frac{\partial}{\partial x^\alpha}. \quad (116,13)$$

Тогда упомянутое соотношение возникнет из тождества

$$[[X_a, X_b], X_c] + [[X_b, X_c], X_a] + [[X_c, X_a], X_b] = 0$$

(так называемое тождество Якоби) и имеет вид

$$C^f_{ab} C^d_{cf} + C^f_{bc} C^d_{af} + C^f_{ca} C^d_{bf} = 0. \quad (116,14)$$

Определенное преимущество перед трехиндексовыми константами C^c_{ab} представляют двухиндексовые величины, получающиеся путем дуального преобразования

$$C^c_{ab} = e_{abd} C^{dc}, \quad (116,15)$$

где $e_{abc} = e^{abc}$ — единичный антисимметричный символ (причем $e_{123} = +1$). Правила коммутации (116,12) с помощью таких констант записутся в виде

$$e^{abc} X_b X_c = C^{ad} X_d. \quad (116,16)$$

Свойство (116,11) уже учтено в определении (116,15), а свойство (116,14) примет вид

$$e_{b,d} C^{cd} C^{ba} = 0. \quad (116,17)$$

¹⁾ В математической теории так называемых непрерывных групп (или групп Ли) операторы, удовлетворяющие условиям вида (116,12), называют *генераторами группы*. Во избежание недоразумений при сравнении с другими изложениями отметим, однако, что систематическая теория непрерывных групп строится обычно исходя из генераторов, определенных по векторам Киллинга: $X_a = \xi_{(a)}^a \partial / \partial x^\alpha$.

Укажем также, что определение (116,9) для величин C^{ab} можно представить в векторном виде:

$$C^{ab} = -\frac{1}{v} e^{(a)} \operatorname{rot} e^{(b)}. \quad (116,18)$$

где снова векторные операции производятся так, как если бы координаты x^a были декартовыми.

Выбор трех реперных векторов в дифференциальных формах (116,1) (а с ними и операторов X_a), разумеется, не однозначен. Они могут быть подвергнуты любому линейному преобразованию с постоянными коэффициентами:

$$e_{(a)} = A_{a(b)}^b e_{(b)}. \quad (116,19)$$

По отношению к таким преобразованиям величины η_{ab} и C^{ab} ведут себя как тензоры.

Условия (116,17) — единственные, которым должны удовлетворять структурные константы C^{ab} . Но среди допускаемых этими условиями наборов констант есть эквивалентные — в том смысле, что различие связано лишь с преобразованиями (116,19). Вопрос о классификации однородных пространств сводится к определению всех неэквивалентных наборов структурных констант. Это можно сделать, воспользовавшись «тензорными» свойствами величин C^{ab} , следующим простым способом (C. G. Behr, 1962).

Несимметричный «тензор» C^{ab} можно разложить на симметричную и антисимметричную части. Первую обозначим посредством n^{ab} , а вторую выразим через дуальный ей «вектор» a_c :

$$C^{ab} = n^{ab} + e^{abc} a_c. \quad (116,20)$$

Подстановка этого выражения в (116,17) приводит к условию

$$n^{ab} a_b = 0. \quad (116,21)$$

Преобразованиями (116,19) симметричный «тензор» n^{ab} может быть приведен к диагональному виду; пусть n_1, n_2, n_3 — его главные значения. Равенство (116,21) показывает, что «вектор» a_b (если он существует) лежит в одном из главных направлений «тензора» n^{ab} , — в том, которое отвечает нулевому главному значению. Не уменьшая общности, можно поэтому положить $a_b = -(a, 0, 0)$. Тогда (116,21) сводится к $a n_1 = 0$, т. е. одна из величин a или n_1 должна быть нулем. Правила же коммутации (116,16) примут вид

$$[X_1, X_2] = -a X_2 + n_3 X_3, \quad [X_2, X_3] = n_1 X_1, \quad [X_3, X_1] = n_2 X_2 + a X_3. \quad (116,22)$$

После этого остается еще свобода в изменении знака операторов X_a и в произвольных их масштабных преобразованиях

(умножению на постоянные). Это позволяет одновременно изменить знак всех n_1, n_2, n_3 , а также сделать величину a положительной (если она отлична от нуля). Можно также обратить все структурные константы в ± 1 , если по крайней мере одна из величин a, n_2, n_3 равна нулю. Если же все эти три величины отличны от нуля, то масштабные преобразования оставляют инвариантным отношение a^2/n_2n_3 ¹⁾.

Таким образом, мы приходим к следующему перечислению возможных типов однородных пространств; в первом столбце таблицы римской цифрой указан номер, которым принято обозначать типы по классификации Бианки (*L. Bianchi, 1918*)²⁾:

Тип	a	n_1	n_2	n_3
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII ₀	0	1	1	0
VI ₀	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII _a	a	0	1	1
III ($a = 1$)	a	0	1	-1
VI _a ($a \neq 1$)	a	0	1	-1

Тип I — евклидово пространство; все компоненты пространственного тензора кривизны (см. ниже формулу (116,24)) обращаются в нуль. Помимо тривиального случая галилеевой метрики, сюда относится зависящая от времени метрика, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

Тип IX содержит в себе как частный случай пространство постоянной положительной кривизны. Оно получается, если в элементе длины (116,2) положить $\eta_{ab} = \delta_{ab}/4\lambda$, где λ — положительная постоянная. Действительно, вычисление по (116,24) с $C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1$ (структурные константы типа IX) дает $P_{(a)(b)} = 1/2\delta_{ab}$ и затем

$$P_{ab} = P_{(a)(b)} e^{(a)} e^{(b)} = 2\lambda \eta_{ab},$$

¹⁾ Строго говоря, для соблюдения «тензорных» свойств C^{ab} надо было бы ввести в определение (116,15) множитель $\sqrt{\eta}$ (ср. сказанное в § 83 о том, как должен быть определен антисимметричный единичный тензор по отношению к произвольным преобразованиям координат). Мы не будем, однако, входить здесь в эти детали: для поставленной цели можно извлекать закон преобразования структурных констант прямо из равенств (116,22).

²⁾ Параметр a пробегает все положительные значения. Соответствующие типы представляют собой фактически однопараметрические семейства различных групп, их объединение в сводные типы VI и VII имеет условный характер.

что как раз и соответствует указанному пространству (ср). (111,3)).

Аналогичным образом пространство постоянной отрицательной кривизны содержится как частный случай в типе V. Действительно, положив $\eta_{ab} = \delta_{ab}/\lambda$ и вычислив $P_{(a)(b)}$ по (116,24) с $C^{23} = -C^{32} = 1$, получим

$$P_{(a)(b)} = -2\delta_{ab}, \quad P_{a\beta} = -2\lambda\gamma_{a\beta},$$

что и отвечает постоянной отрицательной кривизне.

Наконец, покажем, каким образом уравнения Эйнштейна для мира с однородным пространством сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих только функции времени. Для этого пространственные компоненты 4-векторов и 4-тензоров надо разложить по тройке реперных векторов данного пространства:

$$R_{(a)(b)} = R_{\alpha\beta} e_{(a)}^{\alpha} e_{(b)}^{\beta}, \quad R_{0(a)} = R_{0\alpha} e_{(a)}^{\alpha}, \quad u^{(a)} = u^{\alpha} e_{\alpha}^{(a)},$$

причем все эти величины являются уже функциями только от t ; функциями времени являются также и скалярные величины — плотность энергии ε и давление p материи.

Уравнения Эйнштейна в синхронной системе выражаются, согласно (97,11—13), через трехмерные тензоры $\kappa_{\alpha\beta}$ и $P_{\alpha\beta}$. Для первого имеем просто

$$\kappa_{(a)(b)} = \dot{\eta}_{ab}, \quad \kappa_{(a)}^{(b)} = \dot{\eta}_{ac}\eta^{cb} \quad (116,23)$$

(точка означает дифференцирование по t). Компоненты же $P_{(a)(b)}$ можно выразить через величины η_{ab} и структурные константы группы с помощью (98,14). После замены трехиндексовых $\lambda^a{}_{bc} = C^a{}_{bc}$ на двухиндексовые C^{ab} и ряда преобразований¹⁾ получим:

$$P_{(a)}^{(b)} = \frac{1}{2\eta} \{ 2C^{bd}C_{ad} + C^{db}C_{ad} + C^{bd}C_{da} - C_d{}^d(C_a{}^b + C_b{}^a) + \\ + \delta_a^b [(C_d{}^d)^2 - 2C^{df}C_{df}] \}. \quad (116,24)$$

Здесь, в соответствии с общим правилом,

$$C_a{}^b = \eta_{ac}C^{cb}, \quad C_{ab} = \eta_{ac}\eta_{bd}C^{cd}.$$

Отметим также, что тождества Бианки для трехмерного тензора $P_{\alpha\beta}$ в однородном пространстве принимают вид

$$P_b{}^c C_{ca} + F_a{}^c C_{cb} = 0. \quad (116,25)$$

¹⁾ В которых используются формулы

$$\eta_{ad}\eta_{be}\eta_{cf}e^{def} = \eta e_{abc}, \quad e_{abf}e^{cdf} = \delta_a^c\delta_b^d - \delta_a^d\delta_b^c.$$

Окончательные выражения для реперных составляющих 4-тензора Риччи¹⁾:

$$\begin{aligned} R_0^0 &= -\frac{1}{2} \dot{\kappa}_{(a)}^{(a)} - \frac{1}{4} \kappa_{(a)}^{(b)} \kappa_{(b)}^{(a)}, \\ R_{(a)}^0 &= -\frac{1}{2} \kappa_{(b)}^{(c)} (C^b{}_{ca} - \delta_a^b C^d{}_{dc}), \\ R_{(a)}^{(b)} &= -\frac{1}{2 \sqrt{\eta}} (\sqrt{\eta} \kappa_{(a)}^{(b)})^* - P_{(a)}^{(b)}. \end{aligned} \quad (116,26)$$

Подчеркнем, что для составления уравнений Эйнштейна нет, таким образом, необходимости в использовании явных выражений для реперных векторов как функций координат.

§ 117. Плоская анизотропная модель

Адекватность изотропной модели для описания поздних этапов эволюции Вселенной сама по себе не дает оснований ожидать, что она столь же пригодна и для описания ранних стадий эволюции, — вблизи особой точки по времени. Этот вопрос будет детально обсужден в § 119, а в этом и следующем параграфах будут предварительно рассмотрены решения уравнений Эйнштейна, тоже обладающие особой точкой по времени, но принципиально отличных (от фридмановской особенности) типов.

Будем искать решение, в котором все компоненты метрического тензора являются, при надлежащем выборе системы отсчета, функциями лишь одной переменной — времени $x^0 = t^2$). Такой вопрос рассматривался уже в § 109, где, однако, был рассмотрен только случай, когда определитель $|g_{ab}| = 0$. Теперь уже будем считать этот определитель отличным от нуля. Как было показано в § 109, в таком случае можно, без ограничения общности, положить все $g_{0a} = 0$. Преобразованием переменной t , согласно $\sqrt{g_{00}} dt \rightarrow dt$, можно затем обратить g_{00} в единицу, так что мы получим синхронную систему отсчета, в которой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0a} = 0, \quad g_{ab} = -\gamma_{ab}(t). \quad (117,1)$$

Теперь мы можем воспользоваться уравнениями Эйнштейна в виде (97,11—13). Поскольку величины γ_{ab} , а с ними и компоненты трехмерного тензора $\kappa_{ab} = \dot{\gamma}_{ab}$ не зависят от координат x^a , то $R_{0a} \equiv 0$. По той же причине $P_{ab} \equiv 0$, и в результате уравнения гравитационного поля в пустоте сводятся к следующей системе:

$$\dot{\kappa}_a^a + \frac{1}{2} \kappa_a^b \kappa_b^a = 0, \quad (117,2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} (\sqrt{\gamma} \kappa_a^b)^* = 0. \quad (117,3)$$

¹⁾ Ковариантные производные κ_a^b , входящие в R_{ab}^0 , преобразуются с помощью формулы, приведенной в примечании на стр. 379.

²⁾ В § 117—118 для упрощения записи формул полагаем $c = 1$.