Окончательные выражения для реперных составляющих 4-тензора Риччи [1]:

$$R^0_0 = -\frac{1}{2}\dot{\varkappa}^{(a)}_{(a)} - \frac{1}{4}\varkappa^{(b)}_{(a)}\varkappa^{(a)}_{(b)},$$
$$R^0_{(a)} = -\frac{1}{2}\varkappa^{(c)}_{(b)}\left(C^b{}_{ca} - \delta^b_a C^d{}_{dc}\right), \qquad (116,26)$$
$$R^{(b)}_{(a)} = -\frac{1}{2\sqrt{\eta}}\left(\sqrt{\eta}\varkappa^{(b)}_{(a)}\right)^{\cdot} - P^{(b)}_{(a)}.$$

Подчеркнем, что для составления уравнений Эйнштейна нет, таким образом, необходимости в использовании явных выражений для реперных векторов как функций координат.

§ 117. Плоская анизотропная модель

Адекватность изотропной модели для описания поздних этапов эволюции Вселенной сама по себе не дает оснований ожидать, что она столь же пригодна и для описания ранних стадий эволюции, — вблизи особой точки по времени. Этот вопрос будет детально обсужден в § 119, а в этом и следующем параграфах будут предварительно рассмотрены решения уравнений Эйнштейна, тоже обладающие особой точкой по времени, но принципиально отличных (от фридмановской особенности) типов.

Будем искать решение, в котором все компоненты метрического тензора являются, при надлежащем выборе системы отсчета, функциями лишь одной переменной — времени $x^0 = t$ [2]. Такой вопрос рассматривался уже в § 109, где, однако, был рассмотрен только случай, когда определитель $|g_{\alpha\beta}| = 0$. Теперь уже будем считать этот определитель отличным от нуля. Как было показано в § 109, в таком случае можно, без ограничения общности, положить все $g_{0\alpha} = 0$. Преобразованием переменной t, согласно $\sqrt{g_{00}}\,dt \to dt$, можно затем обратить g_{00} в единицу, так что мы получим синхронную систему отсчета, в которой

$$g_{00} = 1, \quad g_{0\alpha} = 0, \quad g_{\alpha\beta} = -\gamma_{\alpha\beta}(t). \qquad (117,1)$$

Теперь мы можем воспользоваться уравнениями Эйнштейна в виде (97,11—13). Поскольку величины $\gamma_{\alpha\beta}$, а с ними и компоненты трехмерного тензора $\varkappa_{\alpha\beta} = \dot{\gamma}_{\alpha\beta}$ не зависят от координат x^α, то $R_{0\alpha} \equiv 0$. По той же причине $P_{\alpha\beta} \equiv 0$, и в результате уравнения гравитационного поля в пустоте сводятся к следующей системе:

$$\dot{\varkappa}^\alpha_\alpha + \frac{1}{2}\varkappa^\beta_\alpha\varkappa^\alpha_\beta = 0, \qquad (117,2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\left(\sqrt{\gamma}\,\varkappa^\beta_\alpha\right)^{\cdot} = 0. \qquad (117,3)$$

---

[1]) Ковариантные производные $\varkappa^\beta_{\alpha;\gamma}$, входящие в R^0_α, преобразуются с помощью формулы, приведенной в примечании на стр. 379.

[2]) В § 117—118 для упрощения записи формул полагаем $c = 1$.

Из (117,3) следует, что

$$\sqrt{\gamma}\,\varkappa_\alpha^\beta = 2\lambda_\alpha^\beta, \tag{117,4}$$

где λ_α^β — постоянные величины. Упрощая по индексам α и β, получим:

$$\varkappa_\alpha^\alpha = \frac{\dot\gamma}{\gamma} = \frac{2}{\sqrt{\gamma}}\lambda_\alpha^\alpha,$$

откуда видно, что $\gamma = \mathrm{const}\, t^2$. Без ограничения общности можно положить $\mathrm{const} = 1$ (это достигается просто изменением масштаба координат x^α); тогда $\lambda_\alpha^\alpha = 1$. Подстановка (117,4) в уравнение (117,2) дает теперь соотношение

$$\lambda_\alpha^\beta \lambda_\beta^\alpha = 1, \tag{117,5}$$

связывающее между собой постоянные λ_α^β.

Далее, опустив в (117,4) индекс β, перепишем эти равенства в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений для $\gamma_{\alpha\beta}$:

$$\dot\gamma_{\alpha\beta} = \frac{2}{t}\lambda_\alpha^\gamma \gamma_{\gamma\beta}. \tag{117,6}$$

Совокупность коэффициентов λ_α^γ можно рассматривать как матрицу некоторой линейной подстановки. Путем соответствующего линейного преобразования координат x^1, x^2, x^3 (или, что эквивалентно, величин $g_{1\beta}$, $g_{2\beta}$, $g_{3\beta}$) можно, вообще говоря, привести эту матрицу к диагональному виду. Обозначим ее главные значения посредством p_1, p_2, p_3 и будем считать, что все они вещественны и различны (о других случаях — см. ниже); единичные векторы в соответствующих главных направлениях пусть будут $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$. Тогда решение уравнений (117,6) можно представить в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = t^{2p_1} n_\alpha^{(1)} n_\beta^{(1)} + t^{2p_2} n_\alpha^{(2)} n_\beta^{(2)} + t^{2p_3} n_\alpha^{(3)} n_\beta^{(3)} \tag{117,7}$$

(постоянные коэффициенты при степенях t можно обратить в единицу путем соответствующего выбора масштаба координат). Наконец, выбрав направления векторов $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$, $\mathbf{n}^{(3)}$ в качестве окончательного направления осей (назовем их x, y, z), приведем метрику к виду

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1}dx^2 - t^{2p_2}dy^2 - t^{2p_3}dz^2. \tag{117,8}$$

(*E. Kasner*, 1922). Здесь p_1, p_2, p_3 — любые три числа, удовлетворяющие двум соотношениям:

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \tag{117,9}$$

(первое следует из $-g = t^2$, а второе получается затем из (117,5)).

Три числа p_1, p_2, p_3 не могут, очевидно, иметь одинаковые значения. Равенство двух из них имеет место в тройках значений (0, 0, 1) и (—1/3, 2/3, 2/3). Во всех других случаях числа p_1, p_2, p_3 различны, причем одно из них отрицательно, а два других положительны. Если расположить их в порядке $p_1 < p_2 < p_3$, то их значения будут лежать в интервалах

$$-\frac{1}{3} \leqslant p_1 \leqslant 0, \quad 0 \leqslant p_2 \leqslant \frac{2}{3}, \quad \frac{2}{3} \leqslant p_3 \leqslant 1. \qquad (117,10)$$

Таким образом, метрика (117,8) соответствует плоскому однородному, но анизотропному пространству, все объемы в котором растут (с увеличением времени) пропорционально t, причем линейные расстояния вдоль двух осей (y, z) увеличиваются, а вдоль одной (x) убывают. Момент $t=0$ является особой точкой решения; метрика имеет в ней особенность, не устранимую никаким преобразованием системы отсчета, причем инварианты тензора четырехмерной кривизны обращаются в бесконечность. Исключением является лишь случай $p_1 = p_2 = 0$, $p_3 = 1$; при этих значениях мы имеем дело просто с плоским пространством-временем: преобразованием $t \operatorname{sh} z = \zeta$, $t \operatorname{ch} z = \tau$ метрика (117,8) приводится к галилеевой [1]).

Метрика (117,8) является точным решением уравнений Эйнштейна для пустого пространства. Но вблизи особой точки, при малых t, она остается приближенным (с точностью до членов главного порядка по $1/t$) решением уравнений и при наличии равномерно распределенной в пространстве материи. Скорость и ход изменения плотности материи определяются при этом просто уравнениями ее движения в заданном гравитационном поле, а обратное влияние материи на поле оказывается пренебрежимым. Плотность материи стремится к бесконечности при $t \to 0$ — в соответствии с физическим характером особенности (см. задачу 3).

---

[1]) Решение типа (117,8) существует и в том случае, когда переменная в нем является пространственной; при этом надо только соответствующим образом изменить знаки, например:

$$ds^2 = x^{2p_1} dt^2 - dx^2 - x^{2p_2} dy^2 - x^{2p_3} dz^2.$$

В этом случае, однако, существуют также и решения другого вида, возникающие, когда матрица λ_α^β в уравнениях (117,6) имеет комплексные или совпадающие главные значения (см. задачи 1 и 2). В случае временной переменной t эти решения оказываются невозможными в силу того, что определитель g в них не удовлетворял бы необходимому условию $g < 0$.

Дадим также ссылку на статью, в которой найден ряд точных решений уравнений Эйнштейна в пустоте родственных типов, зависящих от большего числа переменных: *B. K. Harrison*, Phys. Rev. **116**, 1285 (1959).

Задачи

1. Найти решение уравнений (117,6), соответствующее случаю, когда матрица λ_α^β имеет одно вещественное (p_3) и два комплексных ($p_{1,2} = p' \pm ip''$) главных значения.

Решение. В этом случае переменная x^0, от которой зависят все величины, должна иметь пространственный характер; обозначим ее как $x^0 = x$. Соответственно в (117,1) должно быть теперь $g_{00} = -1$. Уравнения же (117,2—3) не меняются.

Векторы $\mathbf{n}^{(1)}$, $\mathbf{n}^{(2)}$ в (117,7) становятся комплексными: $\mathbf{n}^{(1,2)} = (\mathbf{n}' \pm i\mathbf{n}'')/\sqrt{2}$, где $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$ — единичные векторы. Выбирая оси x^1, x^2, x^3 в направлениях $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$, $\mathbf{n}^{(3)}$, получим решение в виде

$$-g_{11} = g_{22} = x^{2p'} \cos\left(2p'' \ln \frac{x}{a}\right), \qquad g_{12} = -x^{2p'} \sin\left(2p'' \ln \frac{x}{a}\right),$$

$$g_{33} = -x^{2p_3}, \qquad -g = -g_{00}\,|g_{\alpha\beta}| = x^2,$$

где a — постоянная (которую уже нельзя устранить выбором масштаба вдоль оси x, не изменив других коэффициентов в написанных выражениях). Числа p_1, p_2, p_3 по-прежнему удовлетворяют соотношениям (117,9), причем вещественное число p_3 либо меньше $-1/3$, либо больше единицы.

2. То же в случае совпадающих двух главных значений ($p_2 = p_3$).

Решение. Как известно, из общей теории линейных дифференциальных уравнений, в этом случае система (117,6) может быть приведена к следующему каноническому виду:

$$\dot{g}_{11} = \frac{2p_1}{x} g_{11}, \qquad \dot{g}_{2\alpha} = \frac{2p_2}{x} g_{2\alpha}, \qquad \dot{g}_{3\alpha} = \frac{2p_2}{x} g_{3\alpha} = a_\alpha + \frac{\lambda}{x} g_{2\alpha}, \qquad \alpha = 2,3,$$

где λ — постоянная. При $\lambda = 0$ мы возвращаемся к (117,8). При $\lambda \neq 0$ можно положить $\lambda = 1$; тогда

$$g_{11} = -x^{2p_1}, \qquad g_{2\alpha} = a_\alpha x^{2p_2}, \qquad g_{3\alpha} = a_\alpha x^{2p_2} \ln x + b_\alpha x^{2p_2}.$$

Из условия $g_{32} = g_{23}$ находим, что $a_2 = 0$, $a_3 = b_2$. Надлежащим выбором масштаба вдоль осей x^2, x^3 окончательно приводим метрику к следующему виду:

$$ds^2 = -dx^2 - x^{2p_1}(dx^1)^2 \pm 2x^{2p_2}\,dx^2\,dx^3 \pm x^{2p_2} \ln \frac{x}{a} (dx^3)^2.$$

Числа p_1, p_2 могут иметь значения 1, 0 или $-1/3$, $2/3$.

3. Вблизи особой точки $t = 0$ найти закон изменения со временем плотности материи, равномерно распределенной в пространстве с метрикой (117,8).

Решение. Пренебрегая обратным влиянием материи на поле, исходим из гидродинамических уравнений движения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g}\, \sigma u^i) = 0,$$

$$(p + \varepsilon)\, u^k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x^k} - \frac{1}{2} u^l \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x^i} - u_i u^k \frac{\partial p}{\partial x^k}, \tag{1}$$

содержащихся в уравнениях $T^k_{i;\,k} = 0$ (см. «Гидродинамика», § 134). Здесь σ — плотность энтропии; вблизи особенности надо пользоваться ультрарелятивистским уравнением состояния $p = \varepsilon/3$, и тогда $\sigma \propto \varepsilon^{3/4}$.

Обозначим временные множители в (117,8) посредством $a = t^{p_1}$, $b = t^{p_2}$, $c = t^{p_3}$. Поскольку все величины зависят только от времени, а $\sqrt{-g} = abc$, уравнения (1) дают

$$\frac{d}{dt}(abcu_0\varepsilon^{3/4}) = 0, \qquad 4\varepsilon\frac{du_\alpha}{dt} + u_\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$abcu_0\varepsilon^{3/4} = \text{const}, \tag{2}$$

$$u_\alpha\varepsilon^{1/4} = \text{const}. \tag{3}$$

Согласно (3) все ковариантные составляющие u_α — одинакового порядка величины. Из контравариантных же компонент наиболее велика (при $t \to 0$) $u^3 \approx u_3/c^2$. Сохранив в тождестве $u_iu^i = 1$ лишь наибольшие члены, получим поэтому $u_0^2 \approx u_3u^3 = (u_3)^2/c^2$ и затем из (2) и (3):

$$\varepsilon \propto \frac{1}{a^2b^2}, \qquad u_\alpha \propto \sqrt{ab},$$

или

$$\varepsilon \propto t^{-2(p_1+p_2)} = t^{-2(1-p_3)}, \qquad u_\alpha \propto t^{(1-p_3)/2}. \tag{4}$$

Как и следовало, ε стремится при $t \to 0$ к бесконечности для всех значений p_3, за исключением лишь $p_3 = 1$, — в соответствии с тем, что особенность в метрике с показателями (0, 0, 1) фиктивна.

Справедливость использованного приближения проверяется оценкой компонент T_i^k, опущенных в правых частях уравнений (117,2—3). Главные члены в них:

$$T_0^0 \sim \varepsilon u_0^2 \propto t^{-(1+p_3)}, \qquad T_1^1 \sim \varepsilon \propto t^{-2(1-p_3)},$$

$$T_2^2 \sim \varepsilon u_2u^2 \propto t^{-(1+2p_2-p_3)}, \qquad T_3^3 \sim \varepsilon u_3u^3 \propto t^{-(1+p_3)}.$$

Все они действительно растут при $t \to 0$ медленнее, чем левые стороны уравнений, возрастающие как t^{-2}.

§ 118. Колебательный режим приближения к особой точке

На примере модели мира с однородным пространством типа IX изучим особенность метрики по времени, имеющую колебательный характер (*В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, 1968). Мы увидим в следующем параграфе, что такой характер имеет весьма общее значение.

Нас будет интересовать поведение модели вблизи особой точки (которую выберем в качестве начала отсчета времени, $t = 0$). Как и в рассмотренном в § 117 решении Казнера, наличие материи не отражается на качественных свойствах этого поведения, и для упрощения исследования будем предполагать пространство пустым.

Положим в (116,3) матрицу величин $\eta_{ab}(t)$ диагональной, обозначив ее диагональные элементы через a^2, b^2, c^2; три реперных вектора $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$ обозначим теперь посредством $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Тогда пространственная метрика запишется в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = a^2l_\alpha l_\beta + b^2m_\alpha m_\beta + c^2n_\alpha n_\beta. \tag{118,1}$$