Обозначим временные множители в (117,8) посредством $a = t^{p_1}$, $b = t^{p_2}$, $c = t^{p_3}$. Поскольку все величины зависят только от времени, а $\sqrt{-g} = abc$, уравнения (1) дают

$$\frac{d}{dt}(abcu_0\varepsilon^{3/4}) = 0, \qquad 4\varepsilon\frac{du_\alpha}{dt} + u_\alpha\frac{d\varepsilon}{dt} = 0.$$

Отсюда

$$abcu_0\varepsilon^{3/4} = \text{const}, \tag{2}$$

$$u_\alpha\varepsilon^{1/4} = \text{const}. \tag{3}$$

Согласно (3) все ковариантные составляющие u_α — одинакового порядка величины. Из контравариантных же компонент наиболее велика (при $t \to 0$) $u^3 \approx u_3/c^2$. Сохранив в тождестве $u_iu^i = 1$ лишь наибольшие члены, получим поэтому $u_0^2 \approx u_3u^3 = (u_3)^2/c^2$ и затем из (2) и (3):

$$\varepsilon \propto \frac{1}{a^2b^2}, \qquad u_\alpha \propto \sqrt{ab},$$

или

$$\varepsilon \propto t^{-2(p_1+p_2)} = t^{-2(1-p_3)}, \qquad u_\alpha \propto t^{(1-p_3)/2}. \tag{4}$$

Как и следовало, ε стремится при $t \to 0$ к бесконечности для всех значений p_3, за исключением лишь $p_3 = 1$, — в соответствии с тем, что особенность в метрике с показателями (0, 0, 1) фиктивна.

Справедливость использованного приближения проверяется оценкой компонент T_i^k, опущенных в правых частях уравнений (117,2—3). Главные члены в них:

$$T_0^0 \sim \varepsilon u_0^2 \propto t^{-(1+p_3)}, \qquad T_1^1 \sim \varepsilon \propto t^{-2(1-p_3)},$$

$$T_2^2 \sim \varepsilon u_2u^2 \propto t^{-(1+2p_2-p_3)}, \qquad T_3^3 \sim \varepsilon u_3u^3 \propto t^{-(1+p_3)}.$$

Все они действительно растут при $t \to 0$ медленнее, чем левые стороны уравнений, возрастающие как t^{-2}.

§ 118. Колебательный режим приближения к особой точке

На примере модели мира с однородным пространством типа IX изучим особенность метрики по времени, имеющую колебательный характер (*В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, 1968). Мы увидим в следующем параграфе, что такой характер имеет весьма общее значение.

Нас будет интересовать поведение модели вблизи особой точки (которую выберем в качестве начала отсчета времени, $t = 0$). Как и в рассмотренном в § 117 решении Казнера, наличие материи не отражается на качественных свойствах этого поведения, и для упрощения исследования будем предполагать пространство пустым.

Положим в (116,3) матрицу величин $\eta_{ab}(t)$ диагональной, обозначив ее диагональные элементы через a^2, b^2, c^2; три реперных вектора $\mathbf{e}^{(1)}$, $\mathbf{e}^{(2)}$, $\mathbf{e}^{(3)}$ обозначим теперь посредством $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$. Тогда пространственная метрика запишется в виде

$$\gamma_{\alpha\beta} = a^2l_\alpha l_\beta + b^2m_\alpha m_\beta + c^2n_\alpha n_\beta. \tag{118,1}$$

Для пространства типа IX структурные константы [1]:

$$C^{11} = C^{22} = C^{33} = 1 \tag{118,2}$$

(при этом $C^1{}_{23} = C^2{}_{31} = C^3{}_{12} = 1$).

Из (116,26) видно, что для таких констант и при диагональной матрице η_{ab} компоненты $R^0_{(a)}$ тензора Риччи в синхронной системе отсчета обращаются в нуль тождественно. Согласно (116,24) обращаются в нуль также и недиагональные компоненты $P_{(a)(b)}$. Остальные компоненты уравнений Эйнштейна дают для функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{(\dot{a}bc)^{\cdot}}{abc} &= \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left[(b^2-c^2)^2-a^4\right], \\ \frac{(a\dot{b}c)^{\cdot}}{abc} &= \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left[(a^2-c^2)^2-b^4\right], \\ \frac{(ab\dot{c})^{\cdot}}{abc} &= \frac{1}{2a^2b^2c^2}\left[(a^2-b^2)-c^4\right], \end{aligned} \tag{118,3}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = 0 \tag{118,4}$$

((118,3) — уравнения $R^{(1)}_{(1)} = R^{(2)}_{(2)} = R^{(3)}_{(3)} = 0$; (118,4) — уравнение $R^0_0 = 0$).

Производные по времени в системе (118,3—4) принимают более простой вид, если ввести вместо функций a, b, c их логарифмы α, β, γ:

$$a = e^{\alpha}, \quad b = e^{\beta}, \quad c = e^{\gamma}, \tag{118,5}$$

а вместо t — переменную τ согласно

$$dt = abc\, d\tau. \tag{118,6}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} 2\alpha_{,\tau,\tau} &= (b^2-c^2)^2 - a^4, \\ 2\beta_{,\tau,\tau} &= (a^2-c^2)^2 - b^4, \\ 2\gamma_{,\tau,\tau} &= (a^2-b^2)^2 - c^4, \end{aligned} \tag{118,7}$$

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)_{,\tau,\tau} = \alpha_{,\tau}\beta_{,\tau} + \alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau} + \beta_{,\tau}\gamma_{,\tau}, \tag{118,8}$$

---

[1]) Соответствующие этим константам реперные векторы:

$\mathbf{l} = (\sin x^3, -\cos x^3 \sin x^2, 0)$, $\mathbf{m} = (\cos x^3, \sin x^3 \sin x^2, 0)$, $\mathbf{n} = (0, \cos x^2, 1)$.

Координаты пробегают значения в интервалах $0 \leqslant x^1 \leqslant \pi$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant x^3 \leqslant 4\pi$. Пространство замкнуто и его объем

$$V = \int \sqrt{\gamma}\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = abc \int \sin x^2\, dx^1\, dx^2\, dx^3 = 16\pi^2 abc.$$

При $a = b = c$ оно переходит в пространство постоянной положительной кривизны с радиусом кривизны $2a$.

где индекс, τ означает дифференцирование по τ. Сложив почленно уравнения (118,7) и заменив в левой стороне сумму вторых производных согласно (118,8), получим:

$$\alpha_{,\tau}\beta_{,\tau}+\alpha_{,\tau}\gamma_{,\tau}+\beta_{,\tau}\gamma_{,\tau}=\frac{1}{4}(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2). \tag{118,9}$$

Это соотношение содержит только первые производные и представляет собой первый интеграл уравнений (118,7).

Уравнения (118,3—4) не могут быть решены точно в аналитическом виде, но вблизи особой точки допускают детальное качественное исследование.

Прежде всего замечаем, что в отсутствие правых частей в уравнениях (118,3) (или, что то же, в уравнениях (118,7)) система имела бы точное решение, в котором

$$a\sim t^{p_l},\quad b\sim t^{p_m},\quad c\sim t^{p_n}, \tag{118,10}$$

где p_l, p_m, p_n — числа, связанные соотношениями

$$p_l+p_m+p_n=p_l^2+p_m^2+p_n^2=1 \tag{118,11}$$

(аналог решения Казнера (117,8) для однородного плоского пространства). Мы обозначили здесь показатели степеней как p_l, p_m, p_n, не предопределяя их последовательности в порядке возрастания; обозначение же p_1, p_2, p_3 из § 117 сохраним за тройками чисел, расположенных в порядке $p_1<p_2<p_3$ и соответственно пробегающими значения в интервалах (117,10). Эти числа могут быть представлены в параметрическом виде как

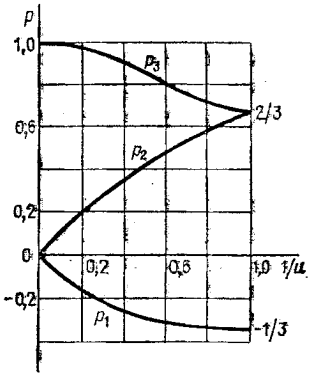

Рис. 25

$$p_1(u)=\frac{-u}{1+u+u^2},\quad p_2(u)=\frac{1+u}{1+u+u^2},\quad p_3(u)=\frac{u(1+u)}{1+u+u^2}. \tag{118,12}$$

Все различные значения p_1, p_2, p_3 (с соблюдением условного порядка) получаются, если параметр u пробегает значения в области $u\geqslant 1$. Значения же $u<1$ приводятся к той же области согласно

$$p_1\left(\frac{1}{u}\right)=p_1(u),\quad p_2\left(\frac{1}{u}\right)=p_3(u),\quad p_3\left(\frac{1}{u}\right)=p_2(u). \tag{118,13}$$

На рис. 25 изображены графики p_1, p_2, p_3 в зависимости от $1/u$.

Предположим, что в некотором интервале времени правые части в уравнениях (118,7) действительно малы, так что ими

можно пренебречь и имеет место казнеровский режим (118,10). Такая ситуация не может продолжаться (при $t \to 0$) неограниченно, так как среди указанных членов всегда имеются возрастающие. Так, если отрицательный показатель степени относится к функции $a(t)$ ($p_l = p_1 < 0$), то возмущение казнеровского режима возникает от членов a^4; остальные же члены при уменьшении t будут убывать.

Сохранив в правых частях (118,7) лишь эти члены, получим систему уравнений

$$\alpha_{,\tau,\tau} = -\frac{1}{2}e^{4\alpha}, \quad \beta_{,\tau,\tau} = \gamma_{,\tau,\tau} = \frac{1}{2}e^{4\alpha}. \qquad (118,14)$$

Решение этих уравнений должно описывать эволюцию метрики из «начального» состояния[1]), в котором оно описывается формулами (118,10) с определенным набором показателей (причем $p_l < 0$); пусть $p_l = p_1$, $p_m = p_2$, $p_n = p_3$, так что

$$a = t^{p_1}, \quad b = t^{p_2}, \quad c = t^{p_3}$$

(коэффициенты пропорциональности в этих выражениях можно положить равными 1 без ограничения общности получаемого ниже результата). При этом $abc = t$, $\tau = \ln t + \text{const}$, поэтому начальные условия для уравнений (118,14) формулируются в виде

$$\alpha_{,\tau} = p_1, \quad \beta_{,\tau} = p_2, \quad \gamma_{,\tau} = p_3.$$

Первое из уравнений (118.14) имеет вид уравнения одномерного движения частицы в поле экспоненциальной потенциальной стенки, причем α играет роль координаты. В этой аналогии начальному казнеровскому режиму соответствует свободное движение с постоянной скоростью $\alpha_{,\tau} = p_1$. Отразившись от стенки, частица будет снова двигаться свободно со скоростью обратного знака: $\alpha_{,\tau} = -p_1$. Заметив также, что в силу всех трех уравнений (118,14)

$$\alpha_{,\tau} + \beta_{,\tau} = \text{const}, \quad \alpha_{,\tau} + \gamma_{,\tau} = \text{const},$$

найдем, что $\beta_{,\tau}$ и $\gamma_{,\tau}$ приобретут значения $\beta_{,\tau} = p_2 + 2p_1$, $\gamma_{,\tau} = p_3 + 2p_1$. Определив отсюда α, β, γ и затем t согласно (118,6), получим:

$$e^{\alpha} \sim e^{-p_1\tau}, \quad e^{\beta} \sim e^{(p_2+2p_1)\tau}, \quad e^{\gamma} \sim e^{(p_3+2p_1)\tau}, \quad t \sim e^{(1+2p_1)\tau},$$

т. е. $a \sim t^{p'_l}$, $b \sim t^{p'_m}$, $c \sim t^{p'_n}$, где

$$p'_l = \frac{|p_1|}{1-2|p_1|}, \quad p'_m = -\frac{2|p_1|-p_2}{1-2|p_1|}, \quad p'_n = \frac{p_3-2|p_1|}{1-2|p_1|}. \qquad (118,15)$$

---

[1]) Напомним, что мы рассматриваем эволюцию метрики при $t \to 0$; поэтому «начальные» условия соответствуют более позднему, а не более раннему времени.

Таким образом, воздействие возмущения приводит к смене одной «казнеровской эпохи» другой, причем отрицательная степень t перебрасывается с направления **l** на направление **m**: если было $p_l < 0$, то теперь $p'_m < 0$. В процессе смены функция $a(t)$ проходит через максимум, а $b(t)$ — через минимум: убывавшая прежде величина $b(t)$ начинает возрастать, возраставшая $a(t)$ — падать, а функция $c(t)$ продолжает убывать. Само возмущение (члены a^4 в уравнениях (118,7)), прежде возраставшее, начинает убывать и затухает. Дальнейшая эволюция метрики приведет аналогичным образом к возрастанию возмущения, выражающегося членами b^4 в уравнениях (118,7), следующей смене казнеровских показателей, и т. д.

Правило смены показателей (118,15) удобно представить с помощью параметризации (118,12): если

$$p_l = p_1(u), \quad p_m = p_2(u), \quad p_n = p_3(u),$$

то

$$p'_l = p_2(u-1), \quad p'_m = p_1(u-1), \quad p'_n = p_3(u-1). \quad (118,16)$$

Остается положительным больший из двух положительных показателей.

В этом процессе смен казнеровских эпох лежит ключ к пониманию характера эволюции метрики при приближении к особой точке.

Последовательные смены (118,16) с перебросом отрицательного показателя степени (p_1) между направлениями **l** и **m** продолжаются до тех пор, пока не исчерпается целая часть начального значения u и не станет $u < 1$. Значение $u < 1$ преобразуется в $u > 1$ согласно (118,13); в этот момент отрицателен показатель p_l или p_m, а p_n становится меньшим из двух положительных чисел ($p_n = p_2$). Следующая серия смен будет уже перебрасывать отрицательный показатель между направлениями **n** и **l** или между **n** и **m**. При произвольном (иррациональном) начальном значении u процесс смен продолжается неограниченно.

При точном решении уравнений показатели p_1, p_2, p_3 теряют, конечно, свой буквальный смысл. Отметим, что вносимая этим обстоятельством некоторая «размытость» в определении этих чисел (а с ними и параметра u), хотя она и мала, лишает смысла рассмотрение как-либо выделенных (например, рациональных) значений u. Именно поэтому реальным смыслом обладают лишь те закономерности, которые свойственны общему случаю произвольных иррациональных значений u.

Таким образом, процесс эволюции модели в направлении к особой точке складывается из последовательных серий колебаний, в течение каждой из которых расстояния вдоль двух пространственных осей осциллируют, а вдоль третьей — монотонно

убывают; объем убывает по закону, близкому к $\sim t$. При переходе от одной серии к следующей направление, вдоль которого происходит монотонное убывание расстояний, переходит с одной оси на другую. Порядок этих переходов приобретает асимптотически характер случайного процесса. Такой же характер приобретает и порядок чередования длин последовательных серий колебаний (т. е. чисел сменяющихся в каждой серии «казнеровских эпох»)[1]).

Последовательные серии колебаний сгущаются по мере приближения к особой точке. Между любым конечным моментом мирового времени t и моментом $t=0$ заключено бесконечное множество колебаний. Естественной переменной для описания временного хода этой эволюции оказывается не само время t, а его логарифм, $\ln t$, по которому весь процесс приближения к особой точке растянут до $-\infty$.

В изложенном решении мы с самого начала несколько упростили задачу, предположив матрицу $\eta_{ab}(t)$ в (116,3) диагональной. Включение в метрику недиагональных компонент η_{ab} не меняет описанного колебательного характера эволюции метрики и закона (118,16) смен показателей p_l, p_m, p_n чередующихся казнеровских эпох. Оно приводит, однако, к появлению дополнительного свойства: смена показателей сопровождается также и изменением направлений осей, к которым эти показатели относятся[2]).

§ 119. Особенность по времени в общем космологическом решении уравнений Эйнштейна

Уже было отмечено, что адекватность модели Фридмана для описания современного состояния Вселенной сама по себе еще не дает оснований ожидать, что она столь же пригодна и для описания ранних стадий эволюции мира. В этой связи возникает

---

[1]) Если «начальное» значение параметра u есть $u_0 = k_0 + x_0$ (где k_0 — целое число, а $x_0 < 1$), то длина первой серии колебаний будет k_0, а начальное значение u для следующей серии будет $u_1 = 1/x_0 \equiv k_1 + x_1$ и т. д. Отсюда легко заключить, что длины последовательных серий даются элементами k_0, k_1, k_2, ... разложения u_0 в бесконечную (при иррациональном u_0) непрерывную дробь

$$u_0 = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \dots}}}.$$

Чередование значений дальних элементов такого разложения подчинено статистическим закономерностям.

[2]) Об этой и о других деталях поведения однородных космологических моделей рассматриваемого типа — см. *В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, УФН 102, 463 (1970); Adv. in Physics 19, 525 (1970); ЖЭТФ 60, 1969 (1971).