убывают; объем убывает по закону, близкому к $\sim t$. При переходе от одной серии к следующей направление, вдоль которого происходит монотонное убывание расстояний, переходит с одной оси на другую. Порядок этих переходов приобретает асимптотически характер случайного процесса. Такой же характер приобретает и порядок чередования длин последовательных серий колебаний (т. е. чисел сменяющихся в каждой серии «казнеровских эпох»)[1]).

Последовательные серии колебаний сгущаются по мере приближения к особой точке. Между любым конечным моментом мирового времени t и моментом $t=0$ заключено бесконечное множество колебаний. Естественной переменной для описания временного хода этой эволюции оказывается не само время t, а его логарифм, $\ln t$, по которому весь процесс приближения к особой точке растянут до $-\infty$.

В изложенном решении мы с самого начала несколько упростили задачу, предположив матрицу $\eta_{ab}(t)$ в (116,3) диагональной. Включение в метрику недиагональных компонент η_{ab} не меняет описанного колебательного характера эволюции метрики и закона (118,16) смен показателей p_l, p_m, p_n чередующихся казнеровских эпох. Оно приводит, однако, к появлению дополнительного свойства: смена показателей сопровождается также и изменением направлений осей, к которым эти показатели относятся[2]).

§ 119. Особенность по времени в общем космологическом решении уравнений Эйнштейна

Уже было отмечено, что адекватность модели Фридмана для описания современного состояния Вселенной сама по себе еще не дает оснований ожидать, что она столь же пригодна и для описания ранних стадий эволюции мира. В этой связи возникает

---

[1]) Если «начальное» значение параметра u есть $u_0 = k_0 + x_0$ (где k_0 — целое число, а $x_0 < 1$), то длина первой серии колебаний будет k_0, а начальное значение u для следующей серии будет $u_1 = 1/x_0 \equiv k_1 + x_1$ и т. д. Отсюда легко заключить, что длины последовательных серий даются элементами k_0, k_1, k_2, ... разложения u_0 в бесконечную (при иррациональном u_0) непрерывную дробь

$$u_0 = k_0 + \cfrac{1}{k_1 + \cfrac{1}{k_2 + \cfrac{1}{k_3 + \dots}}}.$$

Чередование значений дальних элементов такого разложения подчинено статистическим закономерностям.

[2]) Об этой и о других деталях поведения однородных космологических моделей рассматриваемого типа — см. *В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, УФН 102, 463 (1970); Adv. in Physics 19, 525 (1970); ЖЭТФ 60, 1969 (1971).

прежде всего вопрос о том, в какой степени существование особой точки по времени вообще является обязательным свойством космологических моделей, и не связано ли оно со специфическими упрощающими предположениями (в первую очередь с симметрией), лежащими в их основе. Подчеркнем, что, говоря об особой точке, мы имеем в виду физическую особенность — обращение в бесконечность плотности материи и инвариантов тензора четырехмерной кривизны.

Независимость от специфических предположений означала бы, что наличие особенности присуще не только частным, но и общему решению уравнений Эйнштейна. Критерием общности является число содержащихся в решении «физически произвольных» функций. В общем решении число таких функций должно быть достаточным для произвольного задания начальных условий в какой-либо выбранный момент времени (4 для пустого пространства, 8 для пространства, заполненного материей, — см. § 95)[1]).

Нахождение общего решения в точном виде для всего пространства в течение всего времени, разумеется, невозможно. Но для решения поставленного вопроса в этом нет необходимости: достаточно исследовать вид решения вблизи особенности.

Особенность, которую имеет решение Фридмана, характерна тем, что обращение в нуль пространственных расстояний происходит по одинаковому закону во всех направлениях. Такой тип особенности не является достаточно общим: он свойствен классу решений, содержащему лишь три произвольные функции координат (см. задачу к § 113). Отметим также, что эти решения существуют только для пространства, заполненного материей.

Особенность же колебательного типа, рассмотренная в предыдущем параграфе, имеет общий характер — существует решение уравнений Эйштейна с такой особенностью, содержащее всю требуемую совокупность произвольных функций. Мы обрисуем здесь кратко способ построения такого решения, не вникая в детали вычислений[2]).

Как и в однородной модели (§ 118), режим приближения к особой точке в общем решении складывается из чередующихся

---

[1]) Сразу же подчеркнем, однако, что для системы нелинейных дифференциальных уравнений, которую представляют собой уравнения Эйнштейна, понятие общего решения не однозначно. В принципе может существовать более чем один общий интеграл, каждый из которых охватывает собой не все многообразие мыслимых начальных условий, а лишь его конечную часть. Существование общего решения с особенностью не исключает поэтому наличия также и других общих решений, не обладающих особенностью. Например, нет оснований сомневаться в существовании общего решения без особенности, описывающего устойчивое изолированное тело с не слишком большой массой.

[2]) Их можно найти в статье: *В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников*, ЖЭТФ **62**, 1606 (1972); Adv. in Phys. **31**, 639 (1982).

серий сменяющих друг друга «казнеровских эпох». В течение каждой такой эпохи главные (по $1/t$) члены в пространственном метрическом тензоре (в синхронной системе отсчета) имеют вид (118,1) с функциями времени a, b, c из (118,10), но векторы $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ являются теперь произвольными (а не вполне определенными, как в однородном модели) функциями пространственных координат. Такими же функциями (а не просто числами) являются теперь показатели p_l, p_m, p_n, по-прежнему связанные друг с другом соотношениями (118,11). Построенная таким образом метрика удовлетворяет уравнениям $R_0^0=0$ и $R_\alpha^\beta=0$ для поля в пустоте (в их главных членах) в течение некоторого конечного интервала времени. Уравнения же $R_\alpha^0=0$ приводят к трем соотношениям (не содержащим времени), которые должны быть наложены на содержащиеся в $\gamma_{\alpha\beta}$ произвольные функции пространственных координат. Эти соотношения связывают между собой 10 различных функций: по три компоненты трех векторов $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ и одна функция в показателях степеней времени (какая-либо из трех функций p_l, p_m, p_n, связанных двумя условиями (118,11)). При определении числа физически произвольных функций надо учесть также, что синхронная система отсчета допускает еще произвольные преобразования трех пространственных координат, не затрагивающие времени. Поэтому метрика содержит всего $10-3-3=4$ произвольные функции — именно столько, сколько должно быть в общем решении для поля в пустоте.

Смена одной казнеровской эпохи на другую происходит (как и в однородной модели) благодаря наличию в трех из шести уравнений $R_\alpha^\beta=0$ членов, которые при уменьшении t растут быстрее других, играя, таким образом, роль возмущения, разрушающего казнеровский режим. Эти уравнения в общем случае имеют вид, отличающийся от уравнений (118,14) лишь зависящим от пространственных координат множителем $(\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}/\mathbf{l}[\mathbf{mn}])^2$ в их правых сторонах (подразумевается, что из трех показателей p_l, p_m, p_n отрицателен p_l)[1]. Поскольку, однако, уравнения (118,14) составляют систему обыкновенных дифференциальных уравнений по отношению ко времени, это отличие никак не сказывается на их решении и на следующем из этого решения законе смены казнеровских показателей (118,16), а тем самым — и на всех дальнейших следствиях, изложенных в § 118[2]).

---

[1]) Для однородной модели этот множитель совпадает с квадратом структурной константы C^{11} и по определению постоянен.

[2]) Если наложить на произвольные функции в решении дополнительное условие $\mathbf{l}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{l}=0$, то колебания исчезнут и казнеровский режим будет продолжаться до самой точки $t=0$. Такое решение, однако, содержит на одну произвольную функцию меньше, чем требуется в общем случае.

Степень общности решения не уменьшается при введении материи: материя «вписывается» в метрику со всеми вносимыми ею 4 новыми координатными функциями, необходимыми для задания начальных распределений ее плотности и трех компонент скорости. Тензор энергии-импульса материи T_i^k привносит в уравнения поля члены, оказывающиеся более высокого порядка по $1/t$, чем главные члены (в точности аналогично тому, как это было показано в задаче 3 к § 117 для плоской однородной модели).

Таким образом, существование особой точки по времени является весьма общим свойством решений уравнений Эйнштейна, причем режим приближения к особой точке имеет в общем случае колебательный характер [1]). Подчеркнем, что этот характер не связан с наличием материи (а потому и с ее уравнением состояния) и свойствен уже самому по себе пустому пространству-времени. Зависящая же от присутствия материи особенность монотонного изотропного типа, свойственная решению Фридмана, имеет лишь частное значение.

Говоря об особенностях в космологическом аспекте, мы имеем в виду особую точку, достигаемую всем пространством, а не лишь его ограниченной частью, как при гравитационном коллапсе конечного тела. Но общность колебательного решения дает основание полагать, что такой же характер имеет и особенность, достигаемая конечным телом в его коллапсе под горизонтом событий в сопутствующей системе отсчета.

Мы везде говорили о направлении приближения к особой точке как о направлении уменьшения времени; но ввиду симметрии уравнений Эйнштейна по отношению к изменению знака времени, с тем же правом могла бы идти речь о приближении к особенности в направлении увеличения времени. В действительности, однако, ввиду физической неэквивалентности будущего и прошедшего между этими двумя случаями имеется существенное отличие в отношении самой постановки вопроса. Особенность в будущем может иметь физический смысл, лишь если она допустима при произвольных начальных условиях, задаваемых в какой-либо предшествующий момент времени. Ясно, что нет никаких оснований для того, чтобы распределение материи и поля, достигаемое в какой-либо момент в процессе эволюции Вселенной, соответствовало бы специфическим условиям, требуемым для осуществления того или иного частного решения уравнений Эйнштейна.

---

[1]) Факт существования особой точки в общем решении уравнений Эйнштейна был впервые доказан *Пенроузом* (*R. Penrose*, 1965) топологическими методами, которые, однако, не дают возможности установить конкретный аналитический характер особенности. Изложение этих методов и полученных с их помощью теорем см. *Р. Пенроуз*, Структура пространства-времени, «Мир», 1972.

На вопрос же о типе особенности в прошлом исследование, основанное на одних лишь уравнениях гравитации, вряд ли вообще может дать однозначный ответ. Естественно думать, что отбор решения, отвечающего реальному миру, связан с какими-то глубокими физическими требованиями, установление которых на основании одной лишь существующей теории гравитации невозможно, и которые смогут быть выяснены лишь в результате дальнейшего синтеза физических теорий. В этом смысле в принципе может оказаться, что этому отбору соответствует какой-либо частный (например, изотропный) тип особенности.

Наконец, небоходимо сделать еще следующее замечание. Область применимости уравнений Эйнштейна самих по себе никак не ограничена со стороны малых расстояний или больших плотностей материи в том смысле, что уравнения не приводят в этом пределе ни к каким внутренним противоречиям (в отличие, например, от классических уравнений электродинамики). В этом смысле исследование особенностей пространственно-временной метрики на базе уравнений Эйнштейна вполне корректно. Нет сомнений, однако, в том, что в действительности в указанном пределе должны стать существенными квантовые явления, о которых при современном состоянии теории мы еще ничего не можем сказать. Лишь в будущем синтезе теории тяготения и квантовой теории сможет выясниться, что́ именно из результатов классической теории сохранит реальный смысл. В то же время нет сомнений и в том, что самый факт возникновения особенностей в решениях уравнений Эйнштейна (как в космологическом аспекте, так и для коллапса конечных тел) имеет глубокий физический смысл. Не надо забывать и о том, что достижение в процессе гравитационного коллапса уже тех огромных плотностей, при которых еще нет оснований для сомнений в законности классической теории тяготения, достаточны для того, чтобы говорить о физически «особом» явлении.