

определенные значения, то уже никакая другая физическая величина (не являющаяся их функцией) не может иметь в этом состоянии определенного значения. О таких наборах физических величин мы будем говорить как о *полных наборах*.

Всякое описание состояния электрона возникает в результате некоторого измерения. Мы сформулируем теперь, что означает полное описание состояния в квантовой механике. Полным образом описанные состояния возникают в результате одновременного измерения полного набора физических величин. По результатам такого измерения можно, в частности, определить вероятность результатов всякого последующего измерения независимо от всего, что происходило с электроном до первого измерения.

В дальнейшем везде (за исключением только § 14) под состояниями квантовой системы мы будем понимать состояния, описанные именно полным образом.

## § 2. Принцип суперпозиции

Радикальное изменение физических представлений о движении в квантовой механике по сравнению с классической требует, естественно, и столь же радикального изменения математического аппарата теории. В этой связи прежде всего возникает вопрос о способе описания состояния в квантовой механике.

Условимся обозначать посредством  $q$  совокупность координат квантовой системы, а посредством  $dq$  — произведение дифференциалов этих координат (его называют элементом объема *конфигурационного пространства* системы); для одной частицы  $dq$  совпадает с элементом объема  $dV$  обычного пространства.

Основу математического аппарата квантовой механики составляет утверждение, что состояние системы может быть описано определенной (вообще говоря, комплексной) функцией координат  $\Psi(q)$ , причем квадрат модуля этой функции определяет распределение вероятностей значений координат:  $|\Psi|^2 dq$  есть вероятность того, что произведенное над системой измерение обнаружит значения координат в элементе  $dq$  конфигурационного пространства. Функция  $\Psi$  называется *волновой функцией* системы<sup>1)</sup>.

Знание волновой функции позволяет в принципе вычислять вероятности различных результатов также и вообще всякого измерения (не обязательно измерения координат). При этом все эти вероятности определяются выражениями, билинейными по  $\Psi$  и  $\Psi^*$ . Наиболее общий вид такого выражения есть

$$\iint \Psi(q) \Psi^*(q') \Phi(q, q') dq dq', \quad (2,1)$$

<sup>1)</sup> Она была впервые введена в квантовую механику Шредингером (E. Schrödinger, 1926).

где функция  $\varphi(q, q')$  зависит от рода и результата измерения, а интегрирования производится по всему конфигурационному пространству. Сама вероятность  $\Psi\Psi^*$  различных значений координат тоже является выражением такого типа <sup>1)</sup>.

С течением времени состояние системы, а с ним и волновая функция, вообще говоря, меняются. В этом смысле волновую функцию можно рассматривать как функцию также и от времени. Если волновая функция известна в некоторый начальный момент времени, то по самому смыслу понятия полного описания состояния она тем самым в принципе определена и во все будущие моменты времени. Фактическая зависимость волновой функции от времени определяется уравнениями, которые будут выведены в дальнейшем.

Сумма вероятностей всех возможных значений координат системы должна, по определению, быть равной единице. Поэтому нужно, чтобы результат интегрирования  $|\Psi|^2$  по всему конфигурационному пространству был равен единице:

$$\int |\Psi|^2 dq = 1. \quad (2,2)$$

Это равенство представляет собой так называемое *условие нормировки* волновых функций. Если интеграл от  $|\Psi|^2$  сходится, то выбором соответствующего постоянного коэффициента функция  $\Psi$  всегда может быть, как говорят, нормирована. Мы увидим, однако, в дальнейшем, что интеграл от  $|\Psi|^2$  может расходиться и тогда  $\Psi$  не может быть нормирована условием (2,2). В таких случаях  $|\Psi|^2$  не определяет, конечно, абсолютные значения вероятности координат, но отношение квадратов  $|\Psi|^2$  в двух различных точках конфигурационного пространства определяет относительную вероятность соответствующих значений координат.

Поскольку все вычисляемые с помощью волновой функции величины с непосредственным физическим смыслом имеют вид (2,1), в котором  $\Psi$  входит умноженной на  $\Psi^*$ , то ясно, что нормированная волновая функция определена лишь с точностью до постоянного *фазового* множителя вида  $e^{i\alpha}$ , где  $\alpha$  — любое вещественное число. Эта неоднозначность принципиальная и не может быть устранена; однако она несущественна, так как не отражается ни на каких физических результатах.

В основе положительного содержания квантовой механики лежит ряд утверждений относительно свойств волновой функции, заключающихся в следующем.

Пусть в состоянии с волновой функцией  $\Psi_1(q)$  некоторое измерение приводит с достоверностью к определенному резуль-

<sup>1)</sup> Оно получается из (2,1) при  $\varphi(q, q') = \delta(q - q_0) \delta(q' - q_0)$ , где  $\delta$  обозначает так называемую  $\delta$ -функцию, определяемую ниже, в § 5; посредством  $q_0$  обозначено значение координаты, вероятность которого мы ищем.

тату — результату 1, а в состоянии  $\Psi_2(q)$  — к результату 2. Тогда принимается, что всякая линейная комбинация  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ , т. е. всякая функция вида  $c_1\Psi_1 + c_2\Psi_2$  ( $c_1, c_2$  — постоянные), описывает состояние, в котором то же измерение дает либо результат 1, либо результат 2. Кроме того, можно утверждать, что если нам известна зависимость состояний от времени, которая для одного случая дается функцией  $\Psi_1(q, t)$ , а для другого —  $\Psi_2(q, t)$ , то любая их линейная комбинация тоже дает возможную зависимость состояния от времени.

Эти утверждения составляют содержание так называемого *принципа суперпозиции состояний* — основного положительного принципа квантовой механики. Из него следует, в частности, что все уравнения, которым удовлетворяют волновые функции, должны быть линейными по  $\Psi$ .

Рассмотрим систему, состоящую из двух частей, и предположим, что состояние этой системы задано так, что каждая из частей описана полным образом<sup>1)</sup>. Тогда можно утверждать, что вероятности координат  $q_1$  первой части независимы от вероятностей координат  $q_2$  второй части, и потому распределение вероятностей для системы в целом должно быть равно произведению вероятностей для ее частей. Это значит, что волновая функция  $\Psi_{12}(q_1, q_2)$  системы может быть представлена в виде произведения волновых функций  $\Psi_1(q_1)$  и  $\Psi_2(q_2)$  ее частей:

$$\Psi_{12}(q_1, q_2) = \Psi_1(q_1)\Psi_2(q_2). \quad (2,3)$$

Если обе части не взаимодействуют друг с другом, то такое соотношение между волновыми функциями системы и ее частей сохранится и в будущие моменты времени:

$$\Psi_{12}(q_1, q_2, t) = \Psi_1(q_1, t)\Psi_2(q_2, t). \quad (2,4)$$

### § 3. Операторы

Рассмотрим некоторую физическую величину  $f$ , характеризующую состояние квантовой системы. Строго говоря, в нижеследующих рассуждениях следовало бы говорить не об одной величине, а сразу о целом полном их наборе. Однако все рассуждения от этого по существу не меняются, и в целях краткости и простоты мы говорим ниже всего лишь об одной физической величине.

Значения, которые может принимать данная физическая величина, называют в квантовой механике ее *собственными значе-*

<sup>1)</sup> Тем самым, конечно, дано и полное описание состояния системы в целом. Подчеркнем, однако, что обратное утверждение отнюдь не справедливо: полное описание состояния системы как целого еще не определяет, вообще говоря, полным образом состояний ее отдельных частей (см. также § 14).