поскольку вероятность различных значений координаты определяется квадратом $|\Psi(q)|^2$, то среднее значение координаты

$$\bar{q} = \int q\,|\Psi|^2\,dq \equiv \int \Psi^* q \Psi\,dq.$$

Сравнив это выражение с определением операторов согласно (3,8), мы видим, что [1])

$$\hat{q} = q. \tag{5,16}$$

Собственные функции этого оператора должны определяться, согласно общему правилу, уравнением $q\Psi_{q_0} = q_0\Psi_{q_0}$, где посредством q_0 временно обозначены конкретные значения координаты в отличие от переменной q. Поскольку это равенство может удовлетворяться либо при $\Psi_{q_0} = 0$, либо при $q = q_0$, то ясно, что удовлетворяющие условию нормировки собственные функции есть [2])

$$\Psi_{q_0} = \delta(q - q_0). \tag{5,17}$$

§ 6. Предельный переход

Квантовая механика содержит в себе классическую в качестве предельного случая. Возникает вопрос о том, каким образом осуществляется этот предельный переход.

В квантовой механике электрон описывается волновой функцией, определяющей различные значения его координаты; об этой функции нам известно пока лишь то, что она является решением некоторого линейного дифференциального уравнения в частных производных. В классической же механике электрон рассматривается как материальная частица, движущаяся по траектории, вполне определяющейся уравнениями движения. Взаимоотношение, в некотором смысле аналогичное взаимоотношению между квантовой и классической механикой, имеет место в электродинамике между волновой и геометрической оптикой. В волновой оптике электромагнитные волны описываются векторами электрического и магнитного полей, удовлетворяющими определенной системе линейных дифференциальных уравнений (уравнений Максвелла). В геометрической же оптике рассматривается распространение света по определенным траекториям — лучам. Подобная аналогия позволяет заключить, что предельный переход от кван-

---

[1]) В дальнейшем мы условимся для простоты обозначений писать везде операторы, сводящиеся к умножению на некоторую величину, просто в виде самой этой величины.

[2]) Коэффициенты разложения произвольной функции Ψ по этим собственным функциям равны $a_{q_0} = \int \Psi(q)\,\delta(q - q_0)\,dq = \Psi(q_0)$. Вероятность значений координаты в данном интервале dq_0 равна $|a_{q_0}|^2\,dq_0 = |\Psi(q_0)|^2\,dq_0$, как и должно быть.

товой механики к классической происходит аналогично переходу от волновой к геометрической оптике.

Напомним, каким образом математически осуществляется этот последний переход (см. II, § 53). Пусть u — какая-нибудь из компонент поля в электромагнитной волне. Ее можно представить в виде $u = ae^{i\varphi}$ с вещественными амплитудой a и фазой φ (последнюю называют в геометрической оптике эйконалом). Предельный случай геометрической оптики соответствует малым длинам волн, что математически выражается большой величиной изменения φ на малых расстояниях; это означает, в частности, что фазу можно считать большой по своей абсолютной величине.

Соответственно этому, исходим из предположения, что предельному случаю классической механики соответствуют в квантовой механике волновые функции вида $\Psi = ae^{i\varphi}$, где a — медленно меняющаяся функция, а φ принимает большие значения. Как известно, в механике траектория частиц может быть определена из вариационного принципа, согласно которому так называемое действие S механической системы должно быть минимальным (принцип наименьшего действия). В геометрической же оптике ход лучей определяется так называемым принципом Ферма, согласно которому должна быть минимальной «оптическая длина пути» луча, т. е. разность его фаз в конце и в начале пути.

Исходя из этой аналогии, мы можем утверждать, что фаза φ волновой функции в классическом предельном случае должна быть пропорциональна механическому действию S рассматриваемой физической системы, т. е. должно быть $S = \mathrm{const}\,\varphi$. Коэффициент пропорциональности называется *постоянной Планка* и обозначается буквой $\hbar$ [1]). Она имеет размерность действия (поскольку φ безразмерно) и равна

$$\hbar = 1{,}055\cdot 10^{-27}\ \text{эрг}\cdot\text{с}.$$

Таким образом, волновая функция «почти классической» (или, как говорят, *квазиклассической*) физической системы имеет вид

$$\Psi = ae^{iS/\hbar}. \tag{6,1}$$

Постоянная Планка играет фундаментальную роль во всех квантовых явлениях. Ее относительная величина (по сравнению с другими величинами той же размерности) определяет «степень квантовости» той или иной физической системы. Переход от квантовой к классической механике соответствует большой фазе и может быть формально описан как переход к пределу $\hbar \to 0$ (подобно тому как переход от волновой к геометрической оптике со-

---

[1]) Она была введена в физику *Планком* (*M. Planck*, 1900). Постоянная $\hbar$, которой мы пользуемся везде в этой книге, есть, собственно говоря, постоянная Планка h, деленная на 2π (обозначение Дирака).

ответствует переходу к пределу равной нулю длины волны, $\lambda \to 0$).

Мы выяснили предельный вид волновой функции, но еще остается вопрос о том, каким образом она связана с классическим движением по траектории. В общем случае движение, описываемое волновой функцией, отнюдь не переходит в движение по определенной траектории. Ее связь с классическим движением заключается в том, что если в некоторый начальный момент волновая функция, а с нею и распределение вероятностей координат заданы, то в дальнейшем это распределение будет «перемещаться» так, как это полагается по законам классической механики (подробнее об этом см. конец § 17).

Для того чтобы получить движение по определенной траектории, надо исходить из волновой функции особого вида, заметно отличной от нуля лишь в очень малом участке пространства (так называемый *волновой пакет*); размеры этого участка можно стремить к нулю вместе с $\hbar$. Тогда можно утверждать, что в квазиклассическом случае волновой пакет будет перемещаться в пространстве по классической траектории частицы.

Наконец, квантовомеханические операторы в пределе должны сводиться просто к умножению на соответствующую физическую величину.

§ 7. Волновая функция и измерения

Вернемся снова к процессу измерения, свойства которого были качественно рассмотрены в § 1, и покажем, каким образом эти свойства связаны с математическим аппаратом квантовой механики.

Рассмотрим систему, состоящую из двух частей—классического прибора и электрона (рассматриваемого как квантовый объект). Процесс измерения заключается в том, что эти две части приходят во взаимодействие друг с другом, в результате чего прибор переходит из начального в некоторое другое состояние, и по этому изменению состояния мы судим о состоянии электрона. Состояния прибора различаются значениями некоторой характеризующей его физической величины (или величин)—«показаниями прибора». Обозначим условно эту величину посредством g, а ее собственные значения — как g_n; последние пробегают, соответственно классичности прибора, вообще говоря, непрерывный ряд значений, но мы будем — исключительно в целях упрощения написания нижеследующих формул — считать спектр дискретным. Описание состояний прибора осуществляется квазиклассическими волновыми функциями, которые будем обозначать посредством $\Phi_n(\xi)$, где индекс n отвечает «показанию» g_n прибора, а ξ обозначает условно совокупность его координат. Классичность прибора проявляется