ответствует переходу к пределу равной нулю длины волны, $\lambda \to 0$).

Мы выяснили предельный вид волновой функции, но еще остается вопрос о том, каким образом она связана с классическим движением по траектории. В общем случае движение, описываемое волновой функцией, отнюдь не переходит в движение по определенной траектории. Ее связь с классическим движением заключается в том, что если в некоторый начальный момент волновая функция, а с нею и распределение вероятностей координат заданы, то в дальнейшем это распределение будет «перемещаться» так, как это полагается по законам классической механики (подробнее об этом см. конец § 17).

Для того чтобы получить движение по определенной траектории, надо исходить из волновой функции особого вида, заметно отличной от нуля лишь в очень малом участке пространства (так называемый *волновой пакет*); размеры этого участка можно стремить к нулю вместе с $\hbar$. Тогда можно утверждать, что в квазиклассическом случае волновой пакет будет перемещаться в пространстве по классической траектории частицы.

Наконец, квантовомеханические операторы в пределе должны сводиться просто к умножению на соответствующую физическую величину.

## § 7. Волновая функция и измерения

Вернемся снова к процессу измерения, свойства которого были качественно рассмотрены в § 1, и покажем, каким образом эти свойства связаны с математическим аппаратом квантовой механики.

Рассмотрим систему, состоящую из двух частей—классического прибора и электрона (рассматриваемого как квантовый объект). Процесс измерения заключается в том, что эти две части приходят во взаимодействие друг с другом, в результате чего прибор переходит из начального в некоторое другое состояние, и по этому изменению состояния мы судим о состоянии электрона. Состояния прибора различаются значениями некоторой характеризующей его физической величины (или величин)—«показаниями прибора». Обозначим условно эту величину посредством $g$, а ее собственные значения — как $g_n$; последние пробегают, соответственно классичности прибора, вообще говоря, непрерывный ряд значений, но мы будем — исключительно в целях упрощения написания нижеследующих формул — считать спектр дискретным. Описание состояний прибора осуществляется квазиклассическими волновыми функциями, которые будем обозначать посредством $\Phi_n(\xi)$, где индекс $n$ отвечает «показанию» $g_n$ прибора, а $\xi$ обозначает условно совокупность его координат. Классичность прибора проявляется

в том, что в каждый данный момент времени можно с достоверностью утверждать, что он находится в одном из известных состояний $\Phi_n$ с каким-либо определенным значением величины $g$; для квантовой системы такое утверждение было бы, разумеется, несправедливым.

Пусть $\Phi_0(\xi)$ есть волновая функция начального (до измерения) состояния прибора, а $\Psi(q)$ — некоторая произвольная нормированная начальная волновая функция электрона ($q$ обозначает его координаты). Эти функции описывают состояние прибора и электрона независимым образом, и потому начальная волновая функция всей системы есть произведение

$$\Psi(q)\,\Phi_0(\xi). \tag{7,1}$$

Далее, прибор и электрон приходят во взаимодействие друг с другом. Применяя уравнения квантовой механики, можно, принципиально, проследить за изменением волновой функции системы со временем. После процесса измерения она, разумеется, уже не будет произведением функций от $\xi$ и $q$. Разлагая ее по собственным функциям $\Phi_n$ прибора (образующим полную систему функций), мы получим сумму вида

$$\sum_n A_n(q)\,\Phi_n(\xi), \tag{7,2}$$

где $A_n(q)$ — некоторые функции от $q$.

Теперь выступает на сцену «классичность» прибора и двойственная роль классической механики как предельного случая и в то же время основания квантовой механики. Как уже указывалось, благодаря классичности прибора в каждый момент времени величина $g$ («показание прибора») имеет некоторое определенное значение. Это позволяет утверждать, что состояние системы прибор + электрон после измерения будет в действительности описываться не всей суммой (7,2), а лишь одним членом, соответствующим «показанию» $g_n$ прибора:

$$A_n(q)\,\Phi_n(\xi). \tag{7,3}$$

Отсюда следует, что $A_n(q)$ пропорциональна волновой функции электрона после измерения. Это не есть еще сама волновая функция, что видно уже из того, что функция $A_n(q)$ не нормирована. Она включает в себя как сведения о свойствах возникшего состояния электрона, так и определяемую начальным состоянием системы вероятность появления $n$-го «показания» прибора.

В силу линейности уравнений квантовой механики связь между $A_n(q)$ и начальной волновой функцией электрона $\Psi(q)$ выражается, вообще говоря, некоторым линейным интегральным оператором

$$A_n(q) = \int K_n(q, q')\,\Psi(q')\,dq' \tag{7,4}$$

с ядром $K_n(q, q')$, которое характеризует данный процесс измерения.

Мы предполагаем, что рассматриваемое измерение таково, что в результате него возникает полное описание состояния электрона. Другими словами (см. § 1), в возникшем состоянии вероятности для всех величин должны быть независимыми от предыдущего (до измерения) состояния электрона. Математически это означает, что вид функций $A_n(q)$ должен определяться самим процессом измерения и не должен зависеть от начальной волновой функции $\Psi(q)$ электрона.

Таким образом, $A_n$ должны иметь вид

$$A_n(q) = a_n \varphi_n(q), \tag{7,5}$$

где $\varphi_n$ — определенные функции, которые будем предполагать нормированными, а от начального состояния $\Psi(q)$ зависят только постоянные $a_n$. В интегральной связи (7,4) этому соответствует ядро $K_n(q, q')$, разбивающееся на произведение функций только от $q$ и от $q'$:

$$K_n(q, q') = \varphi_n(q)\,\Psi_n^*(q'). \tag{7,6}$$

Тогда линейная связь постоянных $a_n$ с функцией $\Psi(q)$ дается формулами вида

$$a_n = \int \Psi(q)\,\Psi_n^*(q)\,dq, \tag{7,7}$$

где $\Psi_n(q)$ — некоторые определенные функции, зависящие от процесса измерения.

Функции $\varphi_n(q)$ — нормированные волновые функции электрона после измерения. Таким образом, мы видим, как математический формализм теории отражает возможность получить путем измерения состояние электрона, описанное определенной волновой функцией.

Если измерение производится над электроном с заданной волновой функцией $\Psi(q)$, то постоянные $a_n$ имеют простой физический смысл — в соответствии с общими правилами $|a_n|^2$ есть вероятность того, что измерение даст $n$-й результат. Сумма вероятностей всех результатов есть единица:

$$\sum_n |a_n|^2 = 1. \tag{7,8}$$

Справедливость формул (7,7) и (7,8) при произвольной (нормированной) функции $\Psi(q)$ эквивалентна (ср. § 3) утверждению,

что произвольная функция $\Psi(q)$ может быть разложена по функциям $\Psi_n(q)$. Это значит, что функции $\Psi_n(q)$ образуют полный набор нормированных и взаимно ортогональных функций.

Если начальная волновая функция электрона совпадает с одной из функций $\Psi_n(q)$, то, очевидно, соответствующая постоянная $a_n$ равна единице, а все остальные — нулю. Другими словами, произведенное над электроном в состоянии $\Psi_n(q)$ измерение даст с достоверностью определенный ($n$-й) результат.

Все эти свойства функций $\Psi_n(q)$ показывают, что они являются собственными функциями некоторой характеризующей электрон физической величины (обозначим ее $f$), а о рассматриваемом измерении можно говорить, как об измерении этой величины.

Очень существенно, что функции $\Psi_n(q)$, вообще говоря, не совпадают с функциями $\varphi_n(q)$ (последние, вообще говоря, даже не взаимно ортогональны и не являются системой собственных функций какого-либо оператора). Это обстоятельство прежде всего выражает невоспроизводимость результатов измерений в квантовой механике. Если электрон находился в состоянии $\Psi_n(q)$, то произведенное над ним измерение величины $f$ обнаружит с достоверностью значение $f_n$. Но после измерения электрон окажется в состоянии $\varphi_n(q)$, отличном от исходного, в котором величина $f$ уже вообще не имеет какого-либо определенного значения. Поэтому, произведя над электроном непосредственно вслед за первым повторное измерение, мы получили бы для $f$ значение, не совпадающее с обнаруженным в результате первого измерения [1]). Для предсказания (в смысле вычисления вероятности) результата повторного измерения при известном результате первого измерения надо от первого измерения взять волновую функцию $\varphi_n(q)$ созданного им состояния, а от второго — волновую функцию $\Psi_n(q)$ того состояния, вероятность которого нас интересует. Это означает следующее. Из уравнений квантовой механики определяем волновую функцию $\varphi_n(q, t)$, которая в момент времени первого измерения равна $\varphi_n(q)$. Вероятность $m$-го результата второго измерения, произведенного в момент времени $t$, дается квадратом модуля интеграла $\int \varphi_n(q, t)\, \Psi_m^*(q)\, dq$.

Мы видим, что процесс измерения в квантовой механике имеет «двуликий» характер — его роли по отношению к прошлому и

---

[1]) Из невоспроизводимости измерений существует, однако, важное исключение — единственной величиной, измерение которой повторимо, является координата. Два измерения координаты электрона, произведенные через достаточно короткий промежуток времени, должны дать близкие значения; противное означало бы, что электрон имеет бесконечную скорость. Математически это связано с тем, что координата коммутативна с оператором энергии взаимодействия электрона и прибора, являющейся (в нерелятивистской теории) функцией только от координат.

будущему не совпадают. По отношению к прошлому оно «верифицирует» вероятности различных возможных результатов, предсказываемые по состоянию, созданному предыдущим измерением. По отношению же к будущему оно создает новое состояние (см. также § 44). В самой природе процесса измерения заложена, таким образом, глубокая необратимость.

Эта необратимость имеет важное принципиальное значение. Как мы увидим в дальнейшем (см. конец § 18), основные уравнения квантовой механики сами по себе обладают симметрией по отношению к изменению знака времени; в этом отношении квантовая механика не отличается от классической. Необратимость же процесса измерения вносит в квантовые явления физическую неэквивалентность обоих направлений времени, т. е. приводит к появлению различия между будущим и прошедшим.