При $U_1 = U_2 \equiv U_0$ (симметричная яма) уравнение (1) сводится к

$$\arcsin \frac{\hbar k}{\sqrt{2mU_0}} = \frac{n\pi - ka}{2}. \tag{3}$$

Вводя переменную $\xi = ka/2$, получим при нечетном n уравнение

$$\cos \xi = \pm \gamma\xi, \quad \gamma = \frac{\hbar}{a}\sqrt{\frac{2}{mU_0}}, \tag{4}$$

причем должны браться те корни этого уравнения, для которых $\operatorname{tg} \xi > 0$. При четном n получим уравнение

$$\sin \xi = \pm\gamma\xi, \tag{5}$$

причем надо брать корни, для которых $\operatorname{tg} \xi < 0$. По корням этих двух уравнений определяются уровни энергии $E = 2\xi^2\hbar^2/ma^2$, число уровней (при $\gamma \neq 0$) конечно.

В частности, для мелкой ямы, в которой $U_0 \ll \hbar^2/ma^2$, имеем $\gamma \gg 1$, и уравнение (5) не имеет корней вовсе. Уравнение же (4) имеет один корень (при верхнем знаке в правой части), равный $\xi \approx \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{2\gamma^2}\right)$. Таким образом, в яме имеется всего один уровень энергии

$$E_0 \approx U_0 - \frac{ma^2}{2\hbar^2} U_0^2,$$

расположенный вблизи ее «верха».

3. Определить давление, оказываемое на стенки прямоугольного «потенциального ящика» находящейся в нем частицей.

Решение. Сила, действующая на стенку, перпендикулярную к оси x, есть среднее значение производной $-\partial H/\partial a$ от гамильтоновой функции частицы по длине ящика вдоль оси x; давление же получается делением этой силы на площадь bc стенки. Согласно формуле (11,16) искомое среднее значение находится дифференцированием собственного значения энергии (22,9). В результате получим давление

$$p^{(x)} = \frac{\pi^2\hbar^2}{ma^3bc} n_1^2.$$

§ 23. Линейный осциллятор

Рассмотрим частицу, совершающую одномерные малые колебания (так называемый *линейный осциллятор*). Потенциальная энергия такой частицы равна $m\omega^2x^2/2$, где ω — в классической механике собственная частота колебаний. Соответственно этому, гамильтониан осциллятора

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2}. \tag{23,1}$$

Поскольку потенциальная энергия обращается в бесконечность при $x = \pm\infty$, то частица может совершать лишь финитное движение. В соответствии с этим весь энергетический спектр осциллятора будет дискретным.

Определим уровни энергии осциллятора с помощью матричного метода [1]). Будем исходить из уравнений движения в форме (19,3); в данном случае они дают

$$\hat{\ddot{x}} + \omega^2 x = 0. \tag{23,2}$$

В матричном виде это уравнение гласит:

$$(\ddot{x})_{mn} + \omega^2 x_{mn} = 0.$$

Для матричных элементов ускорения имеем, согласно (11,8), $(\ddot{x})_{mn} = i\omega_{mn}(\dot{x})_{mn} = -\omega_{mn}^2 x_{mn}$. Поэтому получаем

$$\left(\omega_{mn}^2 - \omega^2\right) x_{mn} = 0.$$

Отсюда видно, что равны нулю все матричные элементы x_{mn}, за исключением тех, для которых $\omega_{mn} = \pm\omega$. Пронумеруем все стационарные состояния таким образом, чтобы частоты $\pm\omega$ соответствовали переходам $n \to n \mp 1$, т. е. $\omega_{n,\, n\mp 1} = \pm\omega$. Тогда отличными от нуля матричными элементами будут лишь $x_{n,\, n\mp 1}$.

Будем предполагать, что волновые функции ψ_n выбраны вещественными. Поскольку x есть величина вещественная, то такими же будут и все матричные элементы x_{mn}. Условие эрмитовости (11,10) приводит теперь к тому, что матрица x_{mn} симметрична:

$$x_{mn} = x_{nm}.$$

Для вычисления отличных от нуля матричных элементов координаты воспользуемся правилом коммутации

$$\hat{\dot{x}}\hat{x} - \hat{x}\hat{\dot{x}} = -i\frac{\hbar}{m},$$

написав его в матричном виде

$$(\dot{x}x)_{mn} - (x\dot{x})_{mn} = -\frac{i\hbar}{m}\delta_{mn}.$$

С помощью правила умножения матриц (11,12) имеем отсюда для $m = n$

$$i\sum_l \left(\omega_{nl} x_{nl} x_{ln} - x_{nl}\omega_{ln} x_{ln}\right) = 2i\sum_l \omega_{nl} x_{nl}^2 = -i\frac{\hbar}{m}.$$

В этой сумме отличны от нуля только члены с $l = n \pm 1$, так что получаем

$$(x_{n+1,\, n})^2 - (x_{n,\, n-1})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}. \tag{23,3}$$

---

[1]) Это было сделано *Гейзенбергом* (1925) еще до открытия Шредингером волнового уравнения.

Из этого равенства заключаем, что величины $(x_{n+1,\,n})^2$ образуют арифметическую прогрессию, неограниченную сверху, но непременно ограниченную снизу, так как в ней могут содержаться только положительные члены. Поскольку мы пока установили только относительное расположение номеров состояний n, но не их абсолютные значения, то мы можем произвольно выбрать значение n, соответствующее первому — нормальному — состоянию осциллятора. Положим его равным нулю. Соответственно этому, $x_{0,-1}$ надо считать тождественно равным нулю, и последовательное применение уравнений (23,3) с $n = 0,\ 1, \ldots$ приводит к результату:

$$(x_{n,\,n-1})^2 = \frac{n\hbar}{2m\omega}.$$

Таким образом, окончательно получаем следующее выражение для отличных от нуля матричных элементов координаты [1]:

$$x_{n,\,n-1} = x_{n-1,\,n} = \sqrt{\frac{n\hbar}{2m\omega}}. \tag{23,4}$$

Матрица оператора $\hat{H}$ диагональна и матричные элементы H_{nn} представляют собой искомые собственные значения энергии E_n осциллятора. Для их вычисления пишем

$$\begin{aligned} H_{nn} = E_n &= \frac{m}{2}\left[(\dot{x}^2)_{nn} + \omega^2 (x^2)_{nn}\right] = \\ &= \frac{m}{2}\left[\sum_l i\omega_{nl}x_{nl}\,i\omega_{ln}x_{ln} + \omega^2 \sum_l x_{nl}x_{ln}\right] = \\ &= \frac{m}{2}\sum_l \left(\omega^2 + \omega_{nl}^2\right) x_{ln}^2. \end{aligned}$$

В сумме по l отличны от нуля только члены с $l = n \pm 1$; подставляя (23,4), получаем

$$E_n = (n + {}^1\!/_2)\,\hbar\omega, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{23,5}$$

Таким образом, уровни энергии осциллятора расположены через равные интервалы $\hbar\omega$. Энергия нормального состояния ($n = 0$) равна $\hbar\omega/2$; подчеркнем, что она оказывается отличной от нуля.

---

[1] Мы выбираем неопределенные фазы α_n (см. примечание на стр. 49) таким образом, чтобы получить во всех матричных элементах (23,4) знак $+$ перед корнем. Такой выбор всегда возможен для матрицы, в которой отличны от нуля только элементы для переходов между состояниями с соседними номерами.

Результат (23,5) можно получить и путем решения уравнения Шредингера. Это уравнение для осциллятора имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{m\omega^2x^2}{2}\right)\psi=0. \tag{23,6}$$

Здесь удобно ввести вместо координаты x безразмерную переменную ξ согласно соотношению

$$\xi=\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\,x. \tag{23,7}$$

Тогда получим уравнение

$$\psi''+\left(\frac{2E}{\hbar\omega}-\xi^2\right)\psi=0. \tag{23,8}$$

(Здесь штрих означает дифференцирование по ξ.)

При больших ξ можно опустить $2E/\hbar\omega$ по сравнению с ξ^2; уравнение $\psi''=\xi^2\psi$ имеет асимптотические интегралы $\psi=e^{\pm\xi^2/2}$. (Дифференцирование этой функции действительно дает, при пренебрежении членами более низкого порядка по ξ, $\psi''=\xi^2\psi$.) Поскольку волновая функция ψ должна оставаться при $\xi=\pm\infty$ конечной, то в показателе должен быть выбран знак минус. В связи с этим естественно сделать в уравнении (23,8) подстановку

$$\psi=e^{-\xi^2/2}\chi(\xi). \tag{23,9}$$

Для функции $\chi(\xi)$ получаем уравнение (вводим обозначение $2E/\hbar\omega-1=2n$; поскольку нам заранее известно, что $E>0$, то $n>-1/2$)

$$\chi''-2\xi\chi'+2n\chi=0, \tag{23,10}$$

причем функция χ должна быть конечной при всех конечных ξ, а при $\xi=\pm\infty$ может обращаться в бесконечность не быстрее конечной степени ξ (так, чтобы функция ψ обращалась в нуль).

Такие решения уравнения (23,10) существуют лишь при целых положительных (включая значение нуль) значениях числа n (см. § а математических дополнений); это дает для энергии известные уже нам собственные значения (23,5). Соответствующие различным целым значениям n решения уравнения (23,10) имеют вид

$$\chi=\mathrm{const}\cdot H_n(\xi),$$

где $H_n(\xi)$ — так называемые полиномы Эрмита, представляющие собой полиномы n-й степени по ξ, определяемые формулой

$$H_n(\xi)=(-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}. \tag{23,11}$$

Определяя const так, чтобы функции ψ_n удовлетворяли условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^2(x)\,dx = 1,$$

получим (см. (а, 7))

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right). \qquad (23,12)$$

Так, волновая функция нормального состояния есть

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}. \qquad (23,13)$$

Как и следовало быть, она не имеет нулей при конечных x.

Вычисляя интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n\psi_m\xi\,d\xi$, можно определить матричные элементы координаты; такое вычисление приводит, разумеется, к тем же значениям (23,4).

В заключение покажем, каким образом можно вычислить волновые функции ψ_n матричным методом. Замечаем, что в матрицах операторов $\hat{\dot{x}} \pm i\omega\hat{x}$ отличны от нуля только элементы

$$(\dot{x} - i\omega x)_{n-1,\,n} = -(\dot{x} + i\omega x)_{n,\,n-1} = -i\sqrt{\frac{2\omega\hbar n}{m}}. \qquad (23,14)$$

Исходя из общей формулы (11,11) и учитывая, что $\psi_{-1} \equiv 0$, заключаем, что

$$(\hat{\dot{x}} - i\omega x)\,\psi_0 = 0.$$

После подстановки выражения $\hat{\dot{x}} = -i\frac{\hbar}{m}\frac{d}{dx}$ получаем отсюда уравнение

$$\frac{d\psi_0}{dx} = -\frac{m\omega}{\hbar}x\psi_0,$$

нормированное решение которого есть (23,13). Далее, поскольку

$$(\hat{\dot{x}} + i\omega\hat{x})\psi_{n-1} = (\dot{x} + i\omega x)_{n,\,n-1}\psi_n = i\sqrt{\frac{2\omega\hbar n}{m}}\,\psi_n,$$

получаем рекуррентную формулу

$$\psi_n = \sqrt{\frac{m}{2\omega\hbar n}}\left(-\frac{\hbar}{m}\frac{d}{dx} + \omega x\right)\psi_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left(-\frac{d}{d\xi} + \xi\right)\psi_{n-1} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2n}} e^{\xi^2/2}\frac{d}{d\xi}\left(e^{-\xi^2/2}\psi_{n-1}\right),$$

n-кратное применение которой к функции (23,13) приводит к выражению (23,12) для нормированных функций ψ_n.

Задачи

1. Определить распределение вероятностей различных значений импульса для осциллятора.

Решение. Вместо того чтобы разлагать волновую функцию стационарного состояния по собственным функциям импульса, в случае осциллятора проще исходить непосредственно из уравнения Шредингера в импульсном представлении. Подставляя в (23,1) оператор координаты (15,12) $\hat{x} = i\hbar d/dp$, получим гамильтониан в импульсном представлении

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{m\omega^2\hbar^2}{2}\frac{d^2}{dp^2}.$$

Соответствующее уравнение Шредингера $\hat{H}a(p) = Ea(p)$ для волновой функции $a(p)$ в импульсном представлении

$$\frac{d^2a(p)}{dp^2} + \frac{2}{m\omega^2\hbar^2}\left(E - \frac{p^2}{2m}\right)a(p) = 0.$$

Это уравнение — в точности такого же вида, как и (23,6); поэтому его решения могут быть написаны непосредственно по аналогии с (23,12). Таким образом, находим искомое распределение вероятностей в виде

$$|a_n(p)|^2\frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{1}{2^n n!\sqrt{\pi m\omega\hbar}}\, e^{-p^2/m\omega\hbar} H_n^2\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right)dp.$$

2. Определить нижний предел для возможных значений энергии осциллятора с помощью соотношения неопределенности (16,7).

Решение. Замечая, что $\overline{x^2} = \bar{x}^2 + (\delta x)^2$, $\overline{p^2} = \bar{p}^2 + (\delta p)^2$ и используя (16,7), имеем для среднего значения энергии осциллятора

$$\bar{E} = \frac{m\omega^2}{2}\overline{x^2} + \frac{\overline{p^2}}{2m} \geqslant \frac{m\omega^2}{2}(\delta x)^2 + \frac{1}{2m}(\delta p)^2 \geqslant \frac{m\omega^2\hbar^2}{8(\delta p)^2} + \frac{(\delta p)^2}{2m}.$$

Найдя минимальное значение этого выражения (как функция от δp), получим нижний предел для средних, а потому и для всех вообще возможных значений энергии: $\bar{E} \geqslant \hbar\omega/2$.

3. Найти волновые функции состояний линейного осциллятора, минимизирующих соотношение неопределенностей, т. е. состояний, в которых средние квадратичные флуктуации координаты и импульса в волновом пакете связаны равенством $\delta p\, \delta x = \hbar/2$ (*E. Schrödinger*, 1926)[1].

Решение. Искомые волновые функции должны иметь вид

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4}(\delta x)^{1/2}}\exp\left\{\frac{i\bar{p}x}{\hbar} - \frac{(x-\bar{x})^2}{4(\delta x)^2} - i\varphi(t)\right\}. \quad (1)$$

Их координатная зависимость в каждый данный момент времени соответствует формуле (16,8), причем $\bar{x} = \bar{x}(t)$ и $\bar{p} = \bar{p}(t) = m\dot{\bar{x}}(t)$ — средние значения координаты и импульса; согласно (19,3) для линейного осциллятора

[1]) Эти состояния называют *когерентными*.

($U = m\omega^2x^2/2$) имеем $\dot{\hat{p}} = -m\omega^2 x$, а потому и для средних значений $\dot{\bar{p}} = -m\omega^2\bar{x}$ или

$$\ddot{\bar{x}} + \omega^2\bar{x} = 0, \tag{2}$$

т. е. функция $\bar{x}(t)$ удовлетворяет классическому уравнению движения. Постоянный коэффициент в (1) определяется условием нормировки $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2\, dx = 1$; помимо этого множителя Ψ может содержать еще фазовый множитель с зависящей от времени фазой $\varphi(t)$. Неизвестные постоянная δx и функция $\varphi(t)$ определяются подстановкой (1) в волновое уравнение

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2x^2}{2}\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

С учетом (2) подстановка дает

$$\left(\frac{x^2}{2} - x\bar{x}\right)\left(\frac{m^2\omega^2}{\hbar^2} - \frac{1}{4(\delta x)^4}\right) + \left[\frac{m^2\dot{\bar{x}}^2}{2\hbar^2} - \frac{\bar{x}^2}{8(\delta x)^4} + \frac{1}{4(\delta x)^2} - \frac{m}{\hbar}\dot{\varphi}(t)\right] = 0.$$

Отсюда находим $(\delta x)^2 = \hbar/2m\omega$ и затем

$$\dot{\varphi} = \frac{m}{2\hbar}(\dot{\bar{x}}^2 - \omega^2\bar{x}^2) + \frac{\omega}{2}, \quad \varphi = \frac{1}{2\hbar}\bar{p}\bar{x} + \frac{\omega}{2}t.$$

Таким образом, окончательно

$$\Psi(x, t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}\exp\left\{\frac{i\bar{p}x}{\hbar} - \frac{m\omega(x-\bar{x})^2}{2\hbar}\right\}\exp\left\{-\frac{i\omega t}{2} - i\frac{\bar{p}\bar{x}}{2\hbar}\right\}. \tag{3}$$

При $\bar{x} = 0$, $\bar{p} = 0$ эта функция переходит в $\psi_0(x)\, e^{-i\omega t/2}$ — волновую функцию основного состояния осциллятора.

Средняя энергия осциллятора в когерентном состоянии

$$\bar{E} = \frac{\overline{p^2}}{2m} + \frac{m\omega^2\overline{x^2}}{2} = \frac{\bar{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\bar{x}^2}{2} + \frac{\hbar\omega}{2} \equiv \hbar\omega\left(\bar{n} + \frac{1}{2}\right); \tag{4}$$

введенная здесь величина $\bar{n}$ есть среднее «число квантов» $\hbar\omega$ в данном состоянии. Мы видим, что когерентное состояние полностью определяется заданием той или иной зависимости $\bar{x}(t)$, удовлетворяющей классическому уравнению (2). Общий вид такой зависимости можно записать в виде

$$\frac{m\omega\bar{x} + i\bar{p}}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = ae^{-i\omega t}, \quad |a|^2 = \bar{n}. \tag{5}$$

Функция (3) может быть разложена по волновым функциям стационарных состояний осциллятора

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\Psi_n, \quad \Psi_n(x, t) = \psi_n(x)\exp\left\{-i\left(n + \frac{1}{2}\right)\omega t\right\}.$$

Коэффициенты этого разложения[1])

$$a_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^* \Psi \, dx. \tag{6}$$

Отсюда вероятность осциллятору находиться в n-м состоянии

$$w_n = |a_n|^2 = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}, \tag{7}$$

т. е. дается известным распределением Пуассона.

4. Определить уровни энергии для частицы, движущейся в поле с потенциальной энергией

$$U(x) = A\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}\right)$$

(рис. 3, *Ph. Morse*, 1929).

Решение. Спектр положительных собственных значений энергий — непрерывен (причем уровни не вырождены), а спектр отрицательных значений — дискретен.

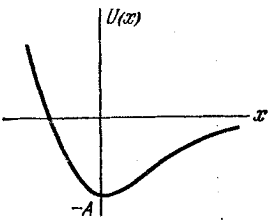

Рис. 3

Уравнение Шредингера гласит:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - Ae^{-2\alpha x} + 2Ae^{-\alpha x}\right)\psi = 0.$$

Вводим новую переменную

$$\xi = \frac{2\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} e^{-\alpha x}$$

(пробегающую значения от 0 до $+\infty$) и обозначения (рассматриваем дискретный спектр, так что $E < 0$)

$$s = \frac{\sqrt{-2mE}}{\alpha\hbar}, \quad n = \frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} - \left(s + \frac{1}{2}\right). \tag{1}$$

Тогда уравнение Шредингера приобретает вид

$$\psi'' + \frac{1}{\xi}\psi' + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n + s + 1/2}{\xi} - \frac{s^2}{\xi^2}\right)\psi = 0.$$

При $\xi \to \infty$ функция ψ ведет себя асимптотически как $e^{\pm\xi/2}$, а при $\xi \to 0$ функция ψ пропорциональна $\xi^{\pm s}$. Из соображений конечности должно быть выбрано решение, ведущее себя как $e^{-\xi/2}$ при $\xi \to \infty$ и как ξ^s при $\xi \to 0$. Делаем подстановку

$$\psi = e^{-\xi/2}\xi^s w(\xi)$$

и получаем для w уравнение

$$\xi w'' + (2s + 1 - \xi) w' + nw = 0, \tag{2}$$

которое должно быть решено при условиях: w конечно при $\xi = 0$, а при $\xi \to \infty$ w обращается в бесконечность не быстрее конечной степени ξ. Уравнение (2)

[1]) Ср. вычисления в задаче 1 § 41.

есть уравнение вырожденной гипергеометрической функции (см. § d математических дополнений)

$$w = F(-n,\ 2s+1,\ \xi).$$

Решение, удовлетворяющее требуемому условию, получается при целом неотрицательном n (причем функция F сводится к полиному). Согласно определениям (1) получаем, следовательно, для уровней энергии значения

$$-E_n = A\left[1 - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2mA}}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right]^2,$$

где n пробегает целые положительные значения, начиная от нуля и до наибольшего значения, при котором еще

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} > n + \frac{1}{2}$$

(так что параметр s, в соответствии с его определением, положителен). Таким образом, дискретный спектр содержит ограниченный ряд уровней. Если

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} < \frac{1}{2},$$

то дискретный спектр вообще отсутствует.

5. То же при $U = -\dfrac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$ (рис. 4).

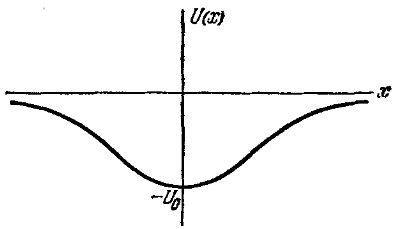

Рис. 4

Решение. Спектр положительных энергий непрерывен, а отрицательных — дискретен; рассматриваем последний. Уравнение Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}\right)\psi = 0.$$

Делаем замену переменной $\xi = \operatorname{th} \alpha x$ и, вводя обозначения

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar\alpha}, \quad \frac{2mU_0}{\alpha^2\hbar^2} = s(s+1), \quad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right),$$

получаем

$$\frac{d}{d\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{d\psi}{d\xi}\right] + \left[s(s+1) - \frac{\varepsilon^2}{1-\xi^2}\right]\psi = 0.$$

Это — уравнение обобщенных функций Лежандра. Приводим его к гипергеометрическому виду подстановкой

$$\psi = (1-\xi^2)^{\varepsilon/2} w(\xi)$$

и временной заменой переменной $\frac{1}{2}(1-\xi) = u$:

$$u(1-u)w'' + (\varepsilon+1)(1-2u)w' - (\varepsilon - s)(\varepsilon + s + 1)w = 0.$$

Решение, конечное при $\xi = 1$ (т. е. при $x = \infty$), есть

$$\psi = (1-\xi^2)^{\varepsilon/2} F\left[\varepsilon - s,\ \varepsilon + s + 1,\ \varepsilon + 1,\ (1-\xi)/2\right].$$

Для того чтобы ψ оставалось конечным и при $\xi = -1$ (т. е. при $x = -\infty$), должно быть $\varepsilon - s = -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (тогда F есть полином степени n, конечный при $\xi = -1$).

Таким образом, уровни энергии определяются условием $s - \varepsilon = n$, откуда

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\left[-(1+2n)+\sqrt{1+\frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right]^2.$$

Имеется конечное число уровней, определяемое условием $\varepsilon > 0$, т. е. $n < s$.

§ 24. Движение в однородном поле

Рассмотрим движение частицы в однородном внешнем поле. Направление поля выберем в качестве оси x, и пусть F есть сила, действующая в поле на частицу; в электрическом поле напряженности E эта сила равна $F = eE$, где e — заряд частицы.

Потенциальная энергия частицы в однородном поле имеет вид $U = -Fx + \text{const}$; выбирая постоянную так, чтобы было $U = 0$ при $x = 0$, имеем $U = -Fx$. Уравнение Шредингера рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + Fx)\psi = 0. \tag{24,1}$$

Поскольку U стремится к $+\infty$ при $x \to -\infty$ и $U \to -\infty$ при $x \to +\infty$, то заранее очевидно, что уровни энергии образуют непрерывный спектр, заполняющий весь интервал значений от $-\infty$ до $+\infty$. Все эти собственные значения не вырождены и соответствуют движению, финитному со стороны $x = -\infty$ и инфинитному в направлении $x \to +\infty$.

Введем вместо координаты x безразмерную переменную

$$\xi = \left(x + \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}. \tag{24,2}$$

Тогда уравнение (24,1) принимает вид

$$\psi'' + \xi\psi = 0. \tag{24,3}$$

Это уравнение вовсе не содержит параметра энергии. Поэтому, получив его решение, удовлетворяющее необходимым условиям конечности, мы тем самым получим собственную функцию для произвольных значений энергии.

Решение уравнений (24,3), конечное при всех x, имеет вид (см. § b математических дополнений)

$$\psi(\xi) = A\Phi(-\xi), \tag{24,4}$$