Для того чтобы ψ оставалось конечным и при $\xi = -1$ (т. е. при $x = -\infty$), должно быть $\varepsilon - s = -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ (тогда F есть полином степени n, конечный при $\xi = -1$).

Таким образом, уровни энергии определяются условием $s - \varepsilon = n$, откуда

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\left[-(1+2n)+\sqrt{1+\frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right]^2.$$

Имеется конечное число уровней, определяемое условием $\varepsilon > 0$, т. е. $n < s$.

§ 24. Движение в однородном поле

Рассмотрим движение частицы в однородном внешнем поле. Направление поля выберем в качестве оси x, и пусть F есть сила, действующая в поле на частицу; в электрическом поле напряженности E эта сила равна $F = eE$, где e — заряд частицы.

Потенциальная энергия частицы в однородном поле имеет вид $U = -Fx + \text{const}$; выбирая постоянную так, чтобы было $U = 0$ при $x = 0$, имеем $U = -Fx$. Уравнение Шредингера рассматриваемой задачи имеет вид

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E + Fx)\psi = 0. \qquad (24,1)$$

Поскольку U стремится к $+\infty$ при $x \to -\infty$ и $U \to -\infty$ при $x \to +\infty$, то заранее очевидно, что уровни энергии образуют непрерывный спектр, заполняющий весь интервал значений от $-\infty$ до $+\infty$. Все эти собственные значения не вырождены и соответствуют движению, финитному со стороны $x = -\infty$ и инфинитному в направлении $x \to +\infty$.

Введем вместо координаты x безразмерную переменную

$$\xi = \left(x + \frac{E}{F}\right)\left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}. \qquad (24,2)$$

Тогда уравнение (24,1) принимает вид

$$\psi'' + \xi\psi = 0. \qquad (24,3)$$

Это уравнение вовсе не содержит параметра энергии. Поэтому, получив его решение, удовлетворяющее необходимым условиям конечности, мы тем самым получим собственную функцию для произвольных значений энергии.

Решение уравнений (24,3), конечное при всех x, имеет вид (см. § b математических дополнений)

$$\psi(\xi) = A\Phi(-\xi), \qquad (24,4)$$

где

$$\Phi(\xi)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\cos\left(\frac{u^3}{3}+u\xi\right)du$$

есть так называемая функция Эйри, а A — нормировочный множитель, который мы определим ниже.

При $\xi\to-\infty$ функция $\psi(\xi)$ стремится к нулю экспоненциально. Асимптотическое выражение, определяющее $\psi(\xi)$ при больших по абсолютной величине отрицательных значениях ξ, имеет вид (см. (b, 4))

$$\psi(\xi)\approx\frac{A}{2|\xi|^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}|\xi|^{3/2}}. \tag{24,5}$$

При больших же положительных значениях ξ асимптотическое выражение функции $\psi(\xi)$ будет следующим (см. (b, 5) [1]):

$$\psi(\xi)=\frac{A}{\xi^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}+\frac{\pi}{4}\right). \tag{24,6}$$

Согласно общему правилу (5,4) нормировки собственных функций непрерывного спектра, приведем функции (24,4) к нормированному на δ-функцию от энергии виду

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(\xi)\psi(\xi')\,dx=\delta(E'-E). \tag{24,7}$$

В § 21 был указан простой способ определения нормировочного коэффициента с помощью асимптотического выражения волновых функций. Следуя этому способу, представляем функцию (24,6) в виде суммы двух бегущих волн:

$$\psi(\xi)\approx\frac{A}{2\xi^{1/4}}\left\{\exp\left[i\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\exp\left[-i\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}.$$

Плотность потока, вычисленная для каждого из этих двух членов, есть

$$v\left(\frac{A}{2\xi^{1/4}}\right)^2=\sqrt{\frac{2}{m}(E+Fx)}\left(\frac{A}{2\xi^{1/4}}\right)^2=A^2\frac{(2\hbar F)^{1/3}}{4m^{2/3}}.$$

---

[1]) Отметим, забегая вперед, что асимптотические выражения (24,5) и (24,6) как раз соответствуют квазиклассическим выражениям волновой функции в классически недоступной и доступной областях (§ 47).

Приравняв ее $1/2\pi\hbar$, находим

$$A = \frac{(2m)^{1/3}}{\pi^{1/2}F^{1/6}\hbar^{2/3}}. \tag{24,8}$$

Задача

Определить волновые функции в импульсном представлении для частицы в однородном поле.

Решение. Гамильтониан в импульсном представлении

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - i\hbar F\frac{d}{dp},$$

так что уравнение Шредингера для волновой функции $a(p)$ имеет вид

$$-i\hbar F\frac{da}{dp} + \left(\frac{p^2}{2m} - E\right)a = 0.$$

Решив это уравнение, получим искомые функции

$$a_E(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar F}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)\right\}.$$

Эти функции нормированы условием

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a_E^*(p)\,a_{E'}(p)\,dp = \delta(E' - E).$$

§ 25. Коэффициент прохождения

Рассмотрим движение частиц в поле изображенного на рис. 5 типа: $U(x)$ монотонно возрастает от одного постоянного предела ($U = 0$ при $x \to -\infty$) до другого ($U = U_0$ при $x \to +\infty$). Согласно классической механике частица с энергией $E < U_0$, движущаяся в таком поле слева направо, дойдя до *потенциальной стенки*, отражается от нее, начиная двигаться в обратном направлении; если же $E > U_0$, то частица продолжает двигаться в прежнем направлении с уменьшенной скоростью. В квантовой механике возникает новое явление — даже при $E > U_0$ частица может отразиться от потенциальной стенки. Вероятность отражения должна вычисляться в принципе следующим образом.

Пусть частица движется слева направо. При больших положительных значениях x волновая функция должна описывать частицу, прошедшую «над стенкой» и движущуюся в положительном направлении оси x, т. е. должна иметь асимптотический вид

$$\text{при } x \to \infty: \quad \psi \approx Ae^{ik_2x}, \quad k_2 = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - U_0)} \tag{25,1}$$