ГЛАВА IV

МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

§ 26. Момент импульса

В § 15 при выводе закона сохранения импульса мы воспользовались однородностью пространства по отношению к замкнутой системе частиц. Наряду с однородностью пространство обладает также и свойством изотропии — все направления в нем эквивалентны. Поэтому гамильтониан замкнутой системы должен не меняться при повороте всей системы как целого на произвольный угол вокруг произвольной оси. Достаточно потребовать выполнения этого условия для произвольного бесконечно малого поворота.

Пусть $\delta\boldsymbol{\varphi}$ есть вектор бесконечно малого поворота, равный по величине углу $\delta\varphi$ поворота и направленный по оси, вокруг которой производится поворот. Изменения $\delta\mathbf{r}_a$ (радиусов-векторов частиц $\mathbf{r}_a$) при таком повороте равны

$$\delta\mathbf{r}_a = [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}_a].$$

Произвольная функция $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots)$ при этом преобразовании переходит в функцию

$$\psi(\mathbf{r}_1+\delta\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2+\delta\mathbf{r}_2, \ldots) = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) + \sum_a \delta\mathbf{r}_a\nabla_a\psi =$$

$$= \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots) + \sum_a [\delta\boldsymbol{\varphi}\cdot\mathbf{r}_a]\nabla_a\psi = \left(1 + \delta\boldsymbol{\varphi}\sum_a [\mathbf{r}_a\nabla_a]\right)\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots).$$

Выражение

$$1 + \delta\boldsymbol{\varphi}\sum_a [\mathbf{r}_a\nabla_a]$$

есть оператор бесконечно малого поворота. Тот факт, что бесконечно малый поворот не меняет гамильтониан системы, выражается (ср. § 15) коммутативностью оператора поворота с оператором $\hat{H}$. Поскольку $\delta\boldsymbol{\varphi}$ есть постоянный вектор, то это условие сводится к соотношению

$$\left(\sum_a [\mathbf{r}_a\nabla_a]\right)\hat{H} - \hat{H}\left(\sum_a [\mathbf{r}_a\nabla_a]\right) = 0, \qquad (26,1)$$

выражающему собой некоторый закон сохранения.

Величина, сохранение которой для замкнутой системы следует из свойства изотропии пространства, есть *момент импульса* системы (ср. I, § 9). Таким образом, оператор $\sum [\mathbf{r}_a \nabla_a]$ должен соответствовать, с точностью до постоянного множителя, полному моменту импульса движения системы, а каждый из членов суммы $[\mathbf{r}_a \nabla_a]$ — моменту отдельной частицы.

Коэффициент пропорциональности должен быть положен равным $-i\hbar$; тогда выражение для оператора момента частицы $-i\hbar\,[\mathbf{r}\nabla] = [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}]$ будет в точности соответствовать классическому выражению $[\mathbf{rp}]$. В дальнейшем мы будем всегда пользоваться моментом, измеренным в единицах $\hbar$. Оператор определенного таким образом момента отдельной частицы будем обозначать посредством $\hat{\mathbf{l}}$, а момента всей системы — посредством $\hat{\mathbf{L}}$. Таким образом, оператор момента частицы:

$$\hbar\hat{\mathbf{l}} = [\mathbf{r}\hat{\mathbf{p}}] = -i\hbar\,[\mathbf{r}\nabla] \tag{26,2}$$

или в компонентах:

$$\hbar\hat{l}_x = y\hat{p}_z - z\hat{p}_y, \quad \hbar\hat{l}_y = z\hat{p}_x - x\hat{p}_z, \quad \hbar\hat{l}_z = x\hat{p}_y - y\hat{p}_x.$$

Для системы, находящейся во внешнем поле, момент импульса в общем случае не сохраняется. Однако сохранение момента все же может иметь место при определенной симметрии поля. Так, если система находится в центрально-симметричном поле, то все направления в пространстве, исходящие из центра, эквивалентны, и поэтому будет сохраняться момент количества движения относительно этого центра. Аналогично, в аксиально-симметричном поле сохраняется составляющая момента вдоль оси симметрии. Все эти законы сохранения, имеющие место в классической механике, остаются в силе и в квантовой механике.

У системы с несохраняющимся моментом в стационарных состояниях момент не имеет определенных значений. В таких случаях иногда представляет интерес среднее значение момента в данном стационарном состоянии. Легко видеть, что во всяком невырожденном стационарном состоянии среднее значение момента равно нулю. Действительно, при изменении знака времени энергия не меняется, и поскольку данному уровню энергии соответствует всего одно стационарное состояние, то, следовательно, при замене t на $-t$ состояние системы должно остаться неизменным. Это значит, что должны остаться неизменными и средние значения всех величин, в частности момента. Но при изменении знака времени момент импульса меняет знак, и мы получили бы $\overline{\mathbf{L}} = -\overline{\mathbf{L}}$; отсюда следует, что $\overline{\mathbf{L}} = 0$. Тот же результат можно получить и исходя из математического определения среднего значения $\overline{\mathbf{L}}$ как интеграла от $\psi^*\hat{\mathbf{L}}\psi$. Волновые функции невырожденных состояний вещественны (см. конец § 18). Поэтому выражение

$$\overline{\mathbf{L}} = -i\hbar\int \psi^* \Big(\sum_a [\mathbf{r}_a\nabla_a]\Big)\psi\, dq$$

чисто мнимо, а поскольку $\overline{\mathbf{L}}$ должно быть, разумеется, вещественной величиной, то $\overline{\mathbf{L}} = 0$.

Выясним правила коммутации операторов момента с операторами координат и импульсов. С помощью соотношений (16,2) легко находим

$$\begin{aligned} &\{\hat{l}_x, x\} = 0, \quad \{\hat{l}_x, y\} = iz, \quad \{\hat{l}_x, z\} = -iy, \\ &\{\hat{l}_y, y\} = 0, \quad \{\hat{l}_y, z\} = ix, \quad \{\hat{l}_y, x\} = -iz, \\ &\{\hat{l}_z, z\} = 0, \quad \{\hat{l}_z, x\} = iy, \quad \{\hat{l}_z, y\} = -ix. \end{aligned} \tag{26,3}$$

Так,

$$\hat{l}_x y - y\hat{l}_x = \frac{1}{\hbar}(y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)y - y(y\hat{p}_z - z\hat{p}_y)\frac{1}{\hbar} = -\frac{z}{\hbar}\{\hat{p}_y, y\} = iz.$$

Все соотношения (26,3) могут быть написаны в тензорном виде

$$\{\hat{l}_i, x_k\} = ie_{ikl}x_l, \tag{26,4}$$

где e_{ikl} — антисимметричный единичный тензор третьего ранга [1]), а по дважды повторяющимся «немым» индексам подразумевается суммирование.

Легко убедиться, что аналогичные соотношения коммутации имеют место для операторов момента и импульса

$$\{\hat{l}_i, \hat{p}_k\} = ie_{ikl}\hat{p}_l. \tag{26,5}$$

При помощи этих формул легко найти правила коммутации для операторов компонент момента друг с другом. Имеем

$$\begin{aligned} \hbar(\hat{l}_x\hat{l}_y - \hat{l}_y\hat{l}_x) &= \hat{l}_x(z\hat{p}_x - x\hat{p}_z) - (z\hat{p}_x - x\hat{p}_z)\hat{l}_x = \\ &= (\hat{l}_x z - z\hat{l}_x)\hat{p}_x - x(\hat{l}_x\hat{p}_z - \hat{p}_z\hat{l}_x) = -iy\hat{p}_x + ix\hat{p}_y = i\hbar\hat{l}_z. \end{aligned}$$

---

[1]) Антисимметричный единичный тензор третьего ранга e_{ikl} (называемый также единичным аксиальным тензором) определяется как тензор, антисимметричный по всем трем индексам, причем $e_{123} = 1$. Очевидно, что из 27 его компонент отличны от нуля только те 6, у которых индексы i, k, l образуют какую-либо перестановку чисел 1, 2, 3. При этом компоненты равны $+1$, если перестановка i, k, l получается из 1, 2, 3 четным числом парных перестановок чисел (транспозиций), и равны -1 при нечетном числе транспозиций. Очевидно, что

$$e_{ikl}e_{ikm} = 2\delta_{lm}, \quad e_{ikl}e_{ikl} = 6.$$

Компоненты вектора $\mathbf{C} = [\mathbf{AB}]$, являющегося векторным произведением двух векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, могут быть написаны с помощью тензора e_{ikl} в виде

$$C_i = e_{ikl}A_kB_l.$$

Таким образом,

$$\{\hat{l}_y, \hat{l}_z\} = i\hat{l}_x, \quad \{\hat{l}_z, \hat{l}_x\} = i\hat{l}_y, \quad \{\hat{l}_x, \hat{l}_y\} = i\hat{l}_z \tag{26,6}$$

или

$$\{\hat{l}_i, \hat{l}_k\} = ie_{ikl}\hat{l}_l. \tag{26,7}$$

В точности такие же соотношения имеют место и для операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ полного момента системы. Действительно, поскольку операторы моментов различных частиц коммутативны друг с другом, то, например,

$$\sum_a \hat{l}_{ay} \sum_a \hat{l}_{az} - \sum_a \hat{l}_{az} \sum_a \hat{l}_{ay} = \sum_a (\hat{l}_{ay}\hat{l}_{az} - \hat{l}_{az}\hat{l}_{ay}) = i \sum_a \hat{l}_{ax}.$$

Таким образом,

$$\{\hat{L}_y, \hat{L}_z\} = i\hat{L}_x, \ \{\hat{L}_z, \hat{L}_x\} = i\hat{L}_y, \ \{\hat{L}_x, \hat{L}_y\} = i\hat{L}_z. \tag{26,8}$$

Соотношения (26,8) показывают, что три компоненты момента не могут одновременно иметь определенные значения (за исключением только случая, когда все три компоненты одновременно равны нулю — см. ниже). В этом отношении момент существенно отличается от импульса, у которого три компоненты одновременно измеримы.

Из операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ составим оператор квадрата абсолютной величины вектора момента:

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \tag{26,9}$$

Этот оператор коммутативен с каждым из операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$:

$$\{\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_x\} = 0, \quad \{\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_y\} = 0, \quad \{\hat{\mathbf{L}}^2, \hat{L}_z\} = 0. \tag{26,10}$$

Действительно, используя (26,8), имеем, например,

$$\{\hat{L}_x^2, \hat{L}_z\} = \hat{L}_x \{\hat{L}_x, \hat{L}_z\} + \{\hat{L}_x, \hat{L}_z\} \hat{L}_x = -i(\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x),$$

$$\{\hat{L}_y^2, \hat{L}_z\} = i(\hat{L}_x\hat{L}_y + \hat{L}_y\hat{L}_x),$$

$$\{\hat{L}_z^2, \hat{L}_z\} = 0.$$

Складывая эти равенства, получим последнее из соотношений (26,10).

Физически соотношения (26,10) означают, что квадрат момента (т. е. его абсолютная величина) может иметь определенное значение одновременно с одной из его составляющих.

Вместо операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ часто бывает удобнее пользоваться их комплексными комбинациями

$$\hat{L}_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y, \quad \hat{L}_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y. \tag{26,11}$$

Легко убедиться прямым вычислением с помощью (26,8), что для этих комбинаций справедливы следующие правила коммутации:

$$\{\hat{L}_+, \hat{L}_-\} = 2\hat{L}_z, \ \{\hat{L}_z, \hat{L}_+\} = \hat{L}_+, \ \{\hat{L}_z, \hat{L}_-\} = -\hat{L}_-. \quad (26,12)$$

Нетрудно также проверить, что

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z. \quad (26,13)$$

Наконец, выпишем часто используемые выражения для оператора момента отдельной частицы в сферических координатах. Вводя последние согласно обычным соотношениям

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

получим после простого вычисления следующие выражения:

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad (26,14)$$

$$\hat{l}_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \quad (26,15)$$

Подставив их в (26,13), получим оператор квадрата момента частицы в виде

$$\hat{\mathbf{l}}^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]. \quad (26,16)$$

Обратим внимание на то, что это есть, с точностью до множителя, угловая часть оператора Лапласа.

§ 27. Собственные значения момента

Для определения собственных значений проекции момента импульса частицы на некоторое направление удобно воспользоваться выражением для ее оператора в сферических координатах, выбрав полярную ось вдоль рассматриваемого направления. Согласно формуле (26,14) уравнение $\hat{l}_z\psi = l_z\psi$ запишем в виде

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = l_z\psi. \quad (27,1)$$

Его решение есть

$$\psi = f(r, \theta)\, e^{il_z\varphi},$$

где $f(r, \theta)$ — произвольная функция от r и θ. Для того чтобы функция ψ была однозначной, необходимо, чтобы она была периодична по φ с периодом 2π. Отсюда находим [1])

$$l_z = m, \quad m = 0, \ \pm1, \ \pm2, \ \ldots \quad (27,2)$$

[1]) Общепринятое обозначение собственных значений проекции момента буквой m — той же, которой обозначается масса частицы, — фактически не может привести к недоразумениям.