этих комбинаций справедливы следующие правила коммутации:

$$\{\hat{L}_+, \hat{L}_-\} = 2\hat{L}_z, \quad \{\hat{L}_z, \hat{L}_+\} = \hat{L}_+, \quad \{\hat{L}_z, \hat{L}_-\} = -\hat{L}_-. \tag{26,12}$$

Нетрудно также проверить, что

$$\hat{\mathbf{L}}^2 = \hat{L}_+\hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z = \hat{L}_-\hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z. \tag{26,13}$$

Наконец, выпишем часто используемые выражения для оператора момента отдельной частицы в сферических координатах. Вводя последние согласно обычным соотношениям

$$x = r \sin\theta \cos\varphi, \quad y = r \sin\theta \sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

получим после простого вычисления следующие выражения:

$$\hat{l}_z = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{26,14}$$

$$\hat{l}_\pm = e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial}{\partial\varphi}\right). \tag{26,15}$$

Подставив их в (26,13), получим оператор квадрата момента частицы в виде

$$\hat{\mathbf{l}}^2 = -\left[\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\right]. \tag{26,16}$$

Обратим внимание на то, что это есть, с точностью до множителя, угловая часть оператора Лапласа.

§ 27. Собственные значения момента

Для определения собственных значений проекции момента импульса частицы на некоторое направление удобно воспользоваться выражением для ее оператора в сферических координатах, выбрав полярную ось вдоль рассматриваемого направления. Согласно формуле (26,14) уравнение $\hat{l}_z\psi = l_z\psi$ запишем в виде

$$-i\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = l_z\psi. \tag{27,1}$$

Его решение есть

$$\psi = f(r, \theta)\, e^{il_z\varphi},$$

где $f(r, \theta)$ — произвольная функция от r и θ. Для того чтобы функция ψ была однозначной, необходимо, чтобы она была периодична по φ с периодом 2π. Отсюда находим [1])

$$l_z = m, \quad m = 0, \ \pm1, \ \pm2, \ \ldots \tag{27,2}$$

[1]) Общепринятое обозначение собственных значений проекции момента буквой m — той же, которой обозначается масса частицы, — фактически не может привести к недоразумениям.

Таким образом, собственные значения l_z равны положительным и отрицательным целым числам, включая значение нуль. Зависящий от φ множитель, характерный для собственных функций оператора $\hat{l}_z$, обозначим посредством

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}. \tag{27,3}$$

Эти функции нормированы так, что

$$\int_0^{2\pi} \Phi_m^*(\varphi)\,\Phi_{m'}(\varphi)\,d\varphi = \delta_{mm'}. \tag{27,4}$$

Собственные значения z-компоненты полного момента системы, очевидно, тоже равны положительным и отрицательным целым числам:

$$L_z = M, \quad M = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots \tag{27,5}$$

(это следует из того, что оператор $\hat{L}_z$ есть сумма коммутативных друг с другом операторов $\hat{l}_z$ для отдельных частиц).

Поскольку направление оси z заранее ничем не выделено, то ясно, что тот же результат получится для $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, и вообще для составляющей момента по любому направлению, — все они могут принимать лишь целые значения. Этот результат может показаться, на первый взгляд, парадоксальным, особенно, если применить его к двум бесконечно близким направлениям. В действительности, однако, надо иметь в виду, что единственная общая собственная функция операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ соответствует одновременным значениям

$$L_x = L_y = L_z = 0;$$

в этом случае вектор момента импульса, а поэтому и его проекция на любое направление равны нулю. Если же хотя бы одно из собственных значений L_x, L_y, L_z отлично от нуля, то общих собственных функций у соответствующих операторов нет. Другими словами, не существует такого состояния, в котором две или три составляющие момента по различным направлениям имели бы одновременно определенные (отличные от нуля) значения, так что мы можем говорить лишь о целочисленности одной из них.

Стационарные состояния системы, отличающиеся только значением M, обладают одинаковой энергией — это следует уже из общих соображений, связанных с тем, что направление оси z заранее ничем не выделено. Таким образом, энергетические уровни системы с сохраняющимся (отличным от нуля) моментом во всяком случае вырождены [1]).

Перейдем теперь к отысканию собственных значений квадрата момента и покажем, каким образом можно найти эти значения, исходя из одних только правил коммутации (26,8). Обозначим посредством ψ_M волновые функции стационарных состояний с одинаковым значением квадрата $\mathbf{L}^2$, относящихся к одному вырожденному уровню энергии и отличающихся значением M [2]).

Прежде всего замечаем, что поскольку оба направления оси z физически эквивалентны, то для каждого возможного положительного значения $M = |M|$ существует такое же отрицательное $M = -|M|$. Обозначим посредством L (целое положительное число или нуль) наибольшее возможное (при заданном $\mathbf{L}^2$) значение $|M|$. Самый факт существования такого верхнего предела следует из того, что разность $\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2$ есть оператор существенно положительной физической величины $L_x^2 + L_y^2$, и потому его собственные значения не могут быть отрицательными.

Применив оператор $\hat{L}_z\hat{L}_\pm$ к собственной функции ψ_M оператора $\hat{L}_z$ и воспользовавшись правилами коммутации (26,12), получим

$$\hat{L}_z\hat{L}_\pm\psi_M = (M \pm 1)\hat{L}_\pm\psi_M. \tag{27,6}$$

Отсюда видно, что функция $\hat{L}_\pm\psi_M$ есть (с точностью до нормировочной постоянной) собственная функция, соответствующая значению $M \pm 1$ величины L_z

$$\psi_{M+1} = \mathrm{const}\cdot\hat{L}_+\psi_M, \quad \psi_{M-1} = \mathrm{const}\cdot L_-\psi_M. \tag{27,7}$$

---

[1]) Это обстоятельство является частным случаем указанной в § 10 общей теоремы о вырождении уровней при наличии по крайней мере двух сохраняющихся величин с некоммутирующими операторами. Здесь такими величинами являются компоненты момента.

[2]) Здесь подразумевается, что нет никакого дополнительного вырождения, приводящего к одинаковости значений энергии при различных значениях квадрата момента. Это справедливо для дискретного спектра (за исключением случая так называемого «случайного вырождения» в кулоновом поле, см. § 36) и, вообще говоря, несправедливо для энергетических уровней непрерывного спектра. Однако и при наличии дополнительного вырождения всегда можно выбрать собственные функции так, чтобы они соответствовали состояниям с определенными значениями $\mathbf{L}^2$, и из них затем выбрать состояния с одинаковыми значениями E и $\mathbf{L}^2$. Математически это выражается в том, что матрицы коммутативных операторов всегда можно привести одновременно к диагональному виду. В дальнейшем мы будем в аналогичных случаях для краткости говорить так, как если бы никакого дополнительного вырождения не было, имея в виду, что получаемые результаты в действительности, согласно сказанному, от этого предположения не зависят.

Если в первом из этих равенств положить $M = L$, то должно быть тождественно

$$\hat{L}_+\psi_L = 0, \tag{27,8}$$

поскольку состояний с $M > L$, по определению, нет. Применяя к этому равенству оператор $\hat{L}_-$ и воспользовавшись равенством (26,13), получим

$$\hat{L}_-\hat{L}_+\psi_L = (\hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z)\,\psi_L = 0.$$

Но поскольку ψ_M — общие собственные функции операторов $\hat{\mathbf{L}}^2$ и $\hat{L}_z$, то

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi_L = \mathbf{L}^2\psi_L, \quad \hat{L}_z^2\psi_L = L^2\psi_L, \quad \hat{L}_z\psi_L = L\psi_L,$$

так что полученное уравнение дает

$$\mathbf{L}^2 = L\,(L + 1). \tag{27,9}$$

Формулой (27,9) определяются искомые собственные значения квадрата момента; число L пробегает все целые положительные значения, включая значение нуль. При заданном значении числа L компонента $L_z = M$ момента может иметь значения

$$M = L,\ L - 1,\ \ldots,\ -L, \tag{27,10}$$

т. е. всего $2L + 1$ различных значений. Уровень энергии, соответствующий моменту L, таким образом, $(2L + 1)$-кратно вырожден; об этом вырождении обычно говорят как о вырождении по направлениям момента. Состояние с равным нулю моментом, $L = 0$ (при этом все его три компоненты равны нулю), не вырождено. Отметим, что волновая функция такого состояния сферически-симметрична; это ясно уже из того, что ее изменение при любом бесконечно малом повороте, даваемое выражением $\hat{\mathbf{L}}\psi$, обращается в данном случае в нуль.

Мы будем часто говорить для краткости, как это принято, о «моменте L» системы, подразумевая при этом момент с квадратом, равным $L\,(L + 1)$; о z-компоненте же момента говорят обычно просто как о «проекции момента».

Момент одной частицы будем обозначать малой буквой l, т. е. будем писать для нее формулу (27,9) в виде

$$\mathbf{l}^2 = l\,(l + 1). \tag{27,11}$$

Вычислим матричные элементы величин L_x и L_y в представлении, в котором, наряду с энергией, диагональны $\mathbf{L}^2$ и L_z (*M. Born*, *W. Heisenberg*, *P. Jordan*, 1926). Прежде всего замечаем, что поскольку операторы $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$ коммутативны с гамильтонианом, то их матрицы диагональны по отношению к энергии, т. е. все матричные элементы для переходов между состояниями с различной энергией (и различными моментами L) равны нулю. Таким образом, достаточно рассмотреть матричные элементы для переходов внутри группы состояний с различными значениями M, соответствующих одному вырожденному уровню энергии.

Из формул (27,7) видно, что в матрице оператора $\hat{L}_+$ отличны от нуля только элементы, соответствующие переходам $M-1 \to M$, а в матрице оператора $\hat{L}_-$ — элементы с $M \to M-1$. Учитывая это, находим диагональные матричные элементы в обеих сторонах равенства (26,13) и получаем [1])

$$L(L+1) = \langle M | L_+ | M-1 \rangle \langle M-1 | L_- | M \rangle + M^2 - M.$$

Замечая, что в силу эрмитовости операторов $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$

$$\langle M-1 | L_- | M \rangle = \langle M | L_+ | M-1 \rangle^*,$$

переписываем это равенство в виде

$$|\langle M | L_+ | M-1 \rangle|^2 = L(L+1) - M(M-1) = (L-M+1)(L+M),$$

откуда [2])

$$\langle M | L_+ | M-1 \rangle = \langle M-1 | L_- | M \rangle = \sqrt{(L+M)(L-M+1)}. \tag{27,12}$$

Для отличных от нуля матричных элементов самих L_x и L_y отсюда имеем

$$\langle M | L_x | M-1 \rangle = \langle M-1 | L_x | M \rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(L+M)(L-M+1)}, \tag{27,13}$$

$$\langle M | L_y | M-1 \rangle = -\langle M-1 | L_y | M \rangle = -\frac{i}{2}\sqrt{(L+M)(L-M+1)}.$$

Обратим внимание на отсутствие диагональных элементов в матрицах величин L_x, L_y. Поскольку диагональный матричный элемент дает среднее значение величины в соответствующем состоянии, то это значит, что в состояниях с определенными значениями L_z средние значения $\overline{L_x} = \overline{L_y} = 0$. Таким образом, если имеет определенное значение проекция момента на какое-либо направление в пространстве, то в этом же направлении лежит и весь вектор $\overline{\mathbf{L}}$.

---

[1]) В обозначениях матричных элементов мы опускаем для краткости все индексы, по которым они диагональны (в том числе индекс L).

[2]) Выбор знака в этой формуле согласован с выбором фазовых множителей в собственных функциях момента.