§ 28. Собственные функции момента

Заданием значений l и m волновая функция частицы не определяется полностью. Это видно уже из того, что выражения для операторов этих величин в сферических координатах содержат только углы θ и φ, так что их собственные функции могут содержать произвольный, зависящий от r множитель. Мы будем рассматривать здесь только характерную для собственных функций момента угловую часть волной функции. Обозначим ее как $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ и нормируем условием

$$\int |Y_{lm}|^2 do = 1$$

($do = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ — элемент телесного угла).

Как показывают дальнейшие вычисления, задача об определении общих собственных функций операторов $\widehat{\mathbf{l}^2}$ и $\hat{l}_z$ допускает разделение переменных θ и φ, и эти функции можно искать в виде

$$Y_{lm} = \Phi_m(\varphi)\,\Theta_{lm}(\theta), \qquad (28,1)$$

где $\Phi_m(\varphi)$ — собственные функции оператора $\hat{l}_z$, определяемые формулой (27,3). Поскольку функции Φ_m уже нормированы условием (27,4), то Θ_{lm} должны быть нормированы согласно условию

$$\int_0^\pi |\Theta_{lm}|^2 \sin\theta\, d\theta = 1. \qquad (28,2)$$

Функции Y_{lm} с различными l или m автоматически оказываются взаимно ортогональными:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^\pi Y^*_{l'm'} Y_{lm} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \delta_{ll'}\delta_{mm'}, \qquad (28,3)$$

как собственные функции операторов момента, соответствующие различным собственным значениям. В отдельности ортогональны также и функции $\Phi_m(\varphi)$ (см. (27,4)) как собственные функции оператора $\hat{l}_z$, соответствующие различным его собственным значениям m. Функции же $\Theta_{lm}(\theta)$ сами по себе не являются собственными функциями какого-либо из операторов момента; они взаимно ортогональны при различных l, но не при различных m.

Наиболее прямой способ вычисления искомых функций есть непосредственное решение задачи об отыскании собственных функций оператора $\widehat{\mathbf{l}^2}$, написанного в сферических координатах (формула (26,16)). Уравнение $\widehat{\mathbf{l}^2}\psi = \mathbf{l}^2\psi$ гласит:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + l(l+1)\psi = 0.$$

Подставив в это уравнение ψ в виде (28,1), получим для функции Θ_{lm} уравнение

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta_{lm}}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\Theta_{lm}+l(l+1)\Theta_{lm}=0. \quad (28,4)$$

Это уравнение хорошо известно из теории шаровых функций. Оно имеет решения, удовлетворяющие условиям конечности и однозначности, при целых положительных значениях $l \geqslant |m|$, в согласии с полученными выше матричным методом собственными значениями момента. Соответствующие решения представляют собой так называемые присоединенные полиномы Лежандра $P_l^m(\cos\theta)$ (см. § с математических дополнений). Нормируя решение условием (28,2), получим [1])

$$\Theta_{lm}=(-1)^m i^l\sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\theta). \quad (28,5)$$

Здесь предполагается, что $m \geqslant 0$. Для отрицательных m определим Θ_{lm} соотношением

$$\Theta_{l,-|m|}=(-1)^m\Theta_{l|m|}, \quad (28,6)$$

т. е. Θ_{lm} с $m<0$ дается формулой (28,5), в которой надо написать $|m|$ вместо m и опустить множитель $(-1)^m$.

Таким образом, собственные функции момента оказываются, с математической точки зрения, определенным образом нормированными сферическими функциями. Выпишем, для удобства дальнейших ссылок, полное их выражение, учитывающее все указанные определения:

$$Y_{lm}(\theta,\varphi)=(-1)^{\frac{m+|m|}{2}}i^l\left[\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\right]^{1/2}P_l^{|m|}(\cos\theta)e^{im\varphi}. \quad (28,7)$$

В частности,

$$Y_{l0}=i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}P_l(\cos\theta). \quad (28,8)$$

Очевидно, что функции, отличающиеся знаком m, связаны друг с другом соотношениями

$$(-1)^{l-m}Y_{l,-m}=Y_{lm}^*. \quad (28,9)$$

---

[1]) Выбор фазового множителя, разумеется, не определяется условием нормировки. Определение, которым мы будем пользоваться в этой книге, наиболее естественно с точки зрения общей теории сложения моментов; оно отличается от обычно применяемого множителем i^l. Преимущества такого выбора будут очевидны из примечаний на стр. 270, 508, 515.

При $l=0$ (так что и $m=0$) шаровая функция сводится к постоянной. Другими словами, волновые функции состояний частицы с равным нулю моментом зависят только от r, т. е. обладают полной шаровой симметрией — в соответствии со сделанным в § 27 общим утверждением.

При заданном m значения l, начинающиеся с $|m|$, нумеруют последовательные собственные значения величины $\mathbf{l}^2$ в порядке их возрастания. Поэтому на основании общей теоремы о нулях собственных функций (§ 21) мы можем заключить, что функция Θ_{lm} обращается в нуль при $l-|m|$ различных значениях угла θ; другими словами, она имеет в качестве узловых линий $l-|m|$ «кругов широт» шара. Что касается полных угловых функций, то, если выбрать их с вещественными множителями $\cos m\varphi$ или $\sin m\varphi$ вместо $e^{\pm i|m|\varphi}$[1]), они будут иметь в качестве узловых линий еще $|m|$ «меридианных кругов»; общее число узловых линий будет, таким образом, равно l.

Наконец, покажем, каким образом можно вычислить функции Θ_{lm} матричным методом. Это делается аналогично тому, как были вычислены в § 23 волновые функции осциллятора. Исходим из равенства (27,8) $\hat{l}_+Y_{ll}=0$. Воспользовавшись выражением (26,15) для оператора $\hat{l}_+$ и подставляя

$$Y_{ll}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{il\varphi}\Theta_{ll}(\theta),$$

получаем для Θ_{ll} уравнение

$$\frac{d\Theta_{ll}}{d\theta}-l\operatorname{ctg}\theta\cdot\Theta_{ll}=0,$$

откуда $\Theta_{ll}=\mathrm{const}\cdot\sin^l\theta$. Определив постоянную из условия нормировки, получим

$$\Theta_{ll}=(-i)^l\sqrt{\frac{(2l+1)!}{2}}\frac{1}{2^l l!}\sin^l\theta. \tag{28,10}$$

Далее, используя (27,12), пишем

$$\hat{l}_-Y_{l,\,m+1}=(l_-)_{m,\,m+1}Y_{lm}=\sqrt{(l-m)(l+m+1)}\,Y_{lm}.$$

Повторное применение этой формулы дает:

$$\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}Y_{lm}=\frac{1}{\sqrt{(2l)!}}\hat{l}_-^{\,l-m}Y_{ll}.$$

---

[1]) Каждая такая функция соответствует состоянию, в котором l_z не имеет определенного значения, а может иметь, с равной вероятностью, значения $\pm m$.

Вычисление правой части равенства легко производится с помощью выражения (26,15) для оператора $\hat{l}_-$, согласно которому

$$\hat{l}_-[f(\theta)e^{im\varphi}] = e^{i(m-1)\varphi}\sin^{1-m}\theta\frac{d}{d\cos\theta}(f\sin^m\theta).$$

Повторное применение этой формулы дает

$$\hat{l}_-^{l-m}e^{il\varphi}\Theta_{ll} = e^{im\varphi}\sin^{-m}\theta\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}(\sin^l\theta\cdot\Theta_{ll}).$$

Наконец, используя эти соотношения и выражение (28,10) для Θ_{ll}, получим формулу

$$\Theta_{lm}(\theta) = (-i)^l\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l+m)!}{(l-m)!}}\frac{1}{2^l l!\sin^m\theta}\frac{d^{l-m}}{(d\cos\theta)^{l-m}}\sin^{2l}\theta, \tag{28,11}$$

совпадающую с (28,5).

§ 29. Матричные элементы векторов

Рассмотрим снова замкнутую систему частиц [1]), и пусть f есть любая характеризующая ее скалярная физическая величина, а $\hat{f}$ — соответствующий этой величине оператор. Всякий скаляр инвариантен по отношению к повороту системы координат. Поэтому скалярный оператор $\hat{f}$ не меняется под влиянием операции поворота, т. е. коммутирует с оператором поворота. Но мы знаем, что оператор бесконечно малого поворота с точностью до постоянного множителя совпадает с оператором момента, так что

$$\{\hat{f}, \hat{\mathbf{L}}\} = 0. \tag{29,1}$$

Из коммутативности $\hat{f}$ с оператором момента следует, что матрица величины f по отношению к переходам между состояниями с определенными значениями L и M диагональна по этим индексам. Более того, поскольку задание числа M определяет лишь ориентацию системы по отношению к координатным осям, а значение скалярной величины от этой ориентации вообще не зависит, то можно утверждать, что матричные элементы $\langle n'LM \mid f \mid nLM\rangle$ не зависят от значения M (буквой n условно обозначена совокупность всех остальных, помимо L и M, квантовых чисел, определяющих состояние системы). Формальное доказательство этого

---

[1]) Все результаты этого параграфа справедливы и для частицы в центрально-симметричном поле (вообще всегда, когда имеет место сохранение полного момента системы).