(мы воспользовались тем, что $e_{ikl}e_{mkl} = 2\delta_{lm}$). После простого приведения получим в результате

$$a = -\frac{1}{(2l-1)(2l+3)}.$$

§ 30. Четность состояния

Наряду с параллельными переносами и поворотами системы координат (инвариантность по отношению к которым выражает соответственно однородность и изотропию пространства) существует еще одно преобразование, оставляющее неизменным гамильтониан замкнутой системы. Это — так называемое преобразование *инверсии*, заключающееся в одновременном изменении знака всех координат, т. е. изменении направления всех осей на обратное; правовинтовая система координат переходит при этом в левовинтовую, и наоборот. Инвариантность гамильтониана по отношению к этому преобразованию выражает собой симметрию пространства по отношению к зеркальным отражениям[1]. В классической механике инвариантность функции Гамильтона по отношению к инверсии не приводит к каким-либо новым законам сохранения. В квантовой же механике ситуация существенно иная.

Введем оператор инверсии $\hat{P}$[2], действие которого на волновую функцию $\psi(\mathbf{r})$ заключается в изменении знака координат:

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = \psi(-\mathbf{r}). \tag{30,1}$$

Легко найти собственные значения P этого оператора, определяемые уравнением

$$\hat{P}\psi(\mathbf{r}) = P\psi(\mathbf{r}). \tag{30,2}$$

Для этого замечаем, что двукратное воздействие оператора инверсии приводит к тождеству — аргументы функции вообще не меняются. Другими словами, имеем $\hat{P}^2\psi = P^2\psi = \psi$, т. е. $P^2 = 1$, откуда

$$P = \pm 1. \tag{30,3}$$

Таким образом, собственные функции оператора инверсии либо не меняются вовсе под его воздействием, либо меняют свой знак. В первом случае волновую функцию (и соответствующее состояние) называют *четной*, а во втором — *нечетной*.

Инвариантность гамильтониана по отношению к инверсии (т. е. коммутативность операторов $\hat{H}$ и $\hat{P}$) выражает собой, следо-

---

[1]) Инвариантен по отношению к инверсии также и гамильтониан системы частиц, находящихся в центрально-симметричном поле (причем начало координат должно совпадать с центром поля).

[2]) От английского слова parity — четность.

вательно, *закон сохранения четности*: если состояние замкнутой системы обладает определенной четностью (т. е. если оно четно или нечетно), то эта четность сохраняется со временем [1]).

По отношению к инверсии инвариантен также и оператор момента: инверсия меняет знак как координат, так и операторов дифференцирования по ним, а потому оператор (26,2) остается неизменным. Другими словами, оператор инверсии коммутативен с оператором момента, а это значит, что система может обладать определенной четностью одновременно с определенными значениями момента L и его проекции M. При этом можно утверждать, что все состояния, отличающиеся только значением M, обладают одинаковой четностью. Это обстоятельство очевидно уже из независимости свойств замкнутой системы от ее ориентации в пространстве, а формально может быть доказано исходя из коммутации $\hat{L}_+\hat{P} - \hat{P}\hat{L}_+ = 0$ тем же путем, каким было получено (29,3) из (29,2).

Для матричных элементов различных физических величин существуют определенные *правила отбора по четности*.

Рассмотрим сначала скалярные величины. При этом надо различать *истинные скаляры* — не меняющиеся вовсе при инверсии, и *псевдоскаляры* — величины, меняющие знак при инверсии (псевдоскаляром является скалярное произведение аксиального и полярного векторов). Оператор истинного скаляра f коммутативен с $\hat{P}$; отсюда следует, что если матрица P диагональна, то и матрица f диагональна по индексу четности, т. е. отличны от нуля матричные элементы только для переходов $g \to g$ и $u \to u$ (индексы g и u означают соответственно четные и нечетные состояния). Для оператора же псевдоскалярной величины имеем $\hat{P}\hat{f} = -\hat{f}\hat{P}$; операторы $\hat{P}$ и $\hat{f}$ «антикоммутативны». Матричный элемент этого равенства для перехода $g \to g$ есть

$$P_{gg}f_{gg} = -f_{gg}P_{gg},$$

и поскольку $P_{gg} = 1$, то $f_{gg} = 0$; таким же образом находим, что и $f_{uu} = 0$. Таким образом, матрица псевдоскалярной величины имеет отличные от нуля элементы только для переходов с изменением четности. Итак, правила отбора для матричных элементов скалярных величин:

$$\begin{array}{ll} \text{истинные скаляры:} & g \to g, \quad u \to u, \\ \text{псевдоскаляры:} & g \to u, \quad u \to g. \end{array} \tag{30,4}$$

[1]) Во избежании недоразумений напомним, что речь идет о нерелятивистской теории. В природе существуют взаимодействия (рассматриваемые в релятивистской теории), нарушающие сохранение четности.

Эти правила можно получить и другим способом, прямо из определения матричных элементов. Рассмотрим, например, интеграл $f_{ug} = \int \psi_u^* \hat{f} \psi_g dq$, где функция ψ_g — четна, а ψ_u — нечетна. При изменении знака всех координат подынтегральное выражение меняет знак, если f есть истинный скаляр; с другой стороны, интеграл, взятый по всему пространству, не может измениться от изменения обозначения переменных интегрирования. Отсюда следует, что $f_{ug} = -f_{ug}$, т. е. $f_{ug} \equiv 0$.

Аналогичным образом можно получить правила отбора для векторных величин. При этом надо помнить, что обычные, полярные, векторы при инверсии меняют знак, а аксиальные векторы при этом преобразовании не меняются (таков, например, вектор момента — векторное произведение двух полярных векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$). Учтя это, найдем правила отбора:

$$\begin{aligned} &\text{полярные векторы: } g \to u, \quad u \to g, \\ &\text{аксиальные векторы: } g \to g, \quad u \to u. \end{aligned} \tag{30,5}$$

Определим четность состояния одной частицы с моментом l. Преобразование инверсии ($x \to -x$, $y \to -y$, $z \to -z$) состоит, для сферических координат, в преобразовании

$$r \to r, \quad \theta \to \pi - \theta, \quad \varphi \to \varphi + \pi. \tag{30,6}$$

Зависимость волновой функции частицы от углов задается сферической функцией Y_{lm}, которая, с точностью до несущественной для нас здесь постоянной, имеет вид $P_l^m(\cos\theta)\, e^{im\varphi}$. При замене φ на $\varphi + \pi$ множитель $e^{im\varphi}$ умножается на $(-1)^m$, а при замене θ на $\pi - \theta$ $P_l^m(\cos\theta)$ переходит в $P_l^m(-\cos\theta) = (-1)^{l-m} P_l^m(\cos\theta)$. Таким образом, вся функция умножится на число $(-1)^l$ (не зависящее от m, в согласии со сказанным выше), т. е. четность состояния с данным значением l есть

$$P = (-1)^l. \tag{30,7}$$

Мы видим, что все состояния с четным l четны, а с нечетным l нечетны.

Векторная физическая величина, относящаяся к отдельной частице, может иметь матричные элементы лишь для переходов с $l \to l$, $l \pm 1$ (§ 29). Имея это в виду и сопоставляя формулу (30,7) со сказанным выше относительно изменения четности в матричных элементах векторов, мы приходим к выводу, что матричные элементы векторных величин, относящихся к отдельной частице, отличны от нуля только для переходов:

$$\begin{aligned} &\text{полярные векторы: } l \to l \pm 1, \\ &\text{аксиальные векторы: } l \to l. \end{aligned} \tag{30,8}$$