§ 31. Сложение моментов

Рассмотрим систему, состоящую из двух слабо взаимодействующих частей. При полном пренебрежении взаимодействием для каждой из них справедлив закон сохранения момента импульса, а полный момент $\mathbf{L}$ всей системы можно рассматривать как сумму моментов $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ ее частей. В следующем приближении при учете слабого взаимодействия законы сохранения $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ уже не выполняются строго, но определяющие их квадраты чисел L_1 и L_2 остаются «хорошими» квантовыми числами, пригодными для приближенного описания состояния системы. Наглядно, т. е. рассматривая моменты классически, можно сказать, что в этом приближении $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$ вращаются вокруг направления $\mathbf{L}$, оставаясь неизменными по величине.

В связи с рассмотрением таких систем возникает вопрос о *законе сложения моментов.* Каковы возможные значения L при заданных значениях L_1 и L_2? Что касается закона сложения для проекций момента, то он очевиден: из $\hat{L}_z = \hat{L}_{1z} + \hat{L}_{2z}$ следует, что и

$$M = M_1 + M_2. \tag{31,1}$$

Для операторов же квадратов моментов такого простого соотношения нет и для вывода их «закона сложения» рассуждаем следующим образом.

Если выбрать в качестве полной системы физических величин величины $\mathbf{L}_1^2$, $\mathbf{L}_2^2$, L_{1z}, L_{2z} [1]), то каждое состояние будет определяться значениями чисел L_1, L_2, M_1, M_2. При заданных L_1 и L_2 числа M_1, M_2 пробегают соответственно по $(2L_1 + 1)$ и $(2L_2 + 1)$ значений, так что всего имеется $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$ различных состояний с одинаковыми L_1, L_2. Волновые функции состояний в этом описании обозначим как $\varphi_{L_1L_2M_1M_2}$.

Вместо четырех указанных величин в качестве полной системы можно выбрать четыре величины $\mathbf{L}_1^2$, $\mathbf{L}_2^2$, $\mathbf{L}^2$, L_z. Тогда каждое состояние будет характеризоваться значениями чисел L_1, L_2, L, M (соответствующие волновые функции обозначим как $\psi_{L_1L_2LM}$). При заданных L_1 и L_2 должно быть, разумеется, по-прежнему $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$ различных состояний, т. е. при заданных L_1, L_2 пара чисел L, M может пробегать $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$ пар значений. Эти значения можно определить следующими рассуждениями.

---

[1]) И ряд других величин, которые вместе с четырьмя указанными образуют полную систему. Эти остальные величины не играют роли в дальнейших рассуждениях, и для краткости выражений мы о них не говорим вовсе, называя условно полной систему четырех указанных величин.

Складывая друг с другом различные допустимые значения M_1 и M_2, получим соответствующие значения M:

M_1	M_2	M
L_1	L_2	L_1+L_2
L_1 L_1-1	L_2-1 L_2	L_1+L_2-1
L_1-1 L_1 L_1-2	L_2-1 L_2-2 L_2	L_1+L_2-2
. . . . .	. . . . .	. . . . .

Мы видим, что наибольшее возможное значение M есть $M = L_1 + L_2$, причем ему отвечает одно состояние φ (одна пара значений M_1, M_2). Поэтому и наибольшее возможное значение M в состояниях ψ, а следовательно, и наибольшее L, есть $L_1 + L_2$. Далее, имеются два состояния φ с $M = L_1 + L_2 - 1$. Следовательно, должны быть и два состояния ψ с этим значением M; одно из них есть состояние с $L = L_1 + L_2$ (и $M = L - 1$), а другое — с $L = L_1 + L_2 - 1$ (причем $M = L$). Для значения $M = L_1 + L_2 - 2$ есть три различных состояния φ. Это значит, что наряду со значениями $L = L_1 + L_2$, $L = L_1 + L_2 - 1$ возможно также и значение $L = L_1 + L_2 - 2$.

Эти рассуждения можно продолжать в таком же виде, пока при уменьшении M на 1 увеличивается на 1 число состояний с заданным значением M. Легко сообразить, что это будет иметь место до тех пор, пока M не достигнет значения $|L_1 - L_2|$. При дальнейшем уменьшении M число состояний перестанет возрастать, оставаясь равным $2L_2 + 1$ (если $L_2 \leqslant L_1$). Это значит, что $|L_1 - L_2|$ есть наименьшее возможное значение L.

Таким образом, мы приходим к результату, что при заданных L_1 и L_2 число L может пробегать значения

$$L = L_1 + L_2,\ L_1 + L_2 - 1,\ \ldots,\ |L_1 - L_2|, \tag{31,2}$$

всего $2L_2 + 1$ (считая, что $L_2 \leqslant L_1$) различных значений. Легко проверить, что получается действительно $(2L_1 + 1)(2L_2 + 1)$ различных значений пары чисел M, L. При этом существенно отметить, что (если отвлечься от $2L + 1$ различных значений M при заданном L) каждому из возможных значений L (31,2) соответствует всего по одному состоянию.

Этот результат можно наглядно изобразить с помощью так называемой *векторной модели*. Если ввести два вектора $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ с длинами L_1 и L_2, то значения L изобразятся как целочисленные длины векторов $\mathbf{L}$, получающихся в результате векторного сложения $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$; наибольшее $(L_1 + L_2)$ значение L получается при параллельных, а наименьшее $(|L_1 - L_2|)$ — при антипараллельных $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_2$.

В состояниях с определенными значениями моментов L_1, L_2 и полного момента L имеют определенные значения также и скалярные произведения $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}\mathbf{L}_2$. Легко найти эти значения. Для вычисления $\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2$ пишем $\hat{\mathbf{L}} = \hat{\mathbf{L}}_1 + \hat{\mathbf{L}}_2$ или, возводя в квадрат и перенося члены,

$$2\hat{\mathbf{L}}_1\hat{\mathbf{L}}_2 = \hat{\mathbf{L}}^2 - \hat{\mathbf{L}}_1^2 - \hat{\mathbf{L}}_2^2.$$

Заменяя операторы в правой стороне равенства их собственными значениями, получим собственное значение оператора в левой стороне равенства

$$\mathbf{L}_1\mathbf{L}_2 = \frac{1}{2}\{L(L+1) - L_1(L_1+1) - L_2(L_2+1)\}. \tag{31,3}$$

Аналогичным образом найдем

$$\mathbf{L}\mathbf{L}_1 = \frac{1}{2}\{L(L+1) + L_1(L_1+1) - L_2(L_2+1)\}. \tag{31,4}$$

Выясним теперь *правило сложения четностей*. Волновая функция Ψ системы, состоящей из двух независимых частей, представляет собой произведение волновых функций Ψ_1 и Ψ_2 этих частей. Ясно поэтому, что если обе последние обладают одинаковой четностью (т. е. обе меняют или обе не меняют свой знак при изменении знака всех координат), то волновая функция всей системы будет четной. Напротив, если Ψ_1 и Ψ_2 обладают различной четностью, то функция Ψ будет нечетной. Эти утверждения можно выразить равенством

$$P = P_1P_2, \tag{31,5}$$

где P — четность системы в целом, а P_1, P_2 — четности ее частей. Это правило, разумеется, непосредственно обобщается на случай системы, состоящей из произвольного числа невзаимодействующих частей.

В частности, если речь идет о системе частиц, находящихся в центрально-симметричном поле (причем взаимодействие частиц друг с другом можно считать слабым), то четность состояния системы в целом

$$P = (-1)^{l_1+l_2+\dots} \tag{31,6}$$

(см. (30,7)). Подчеркнем, что здесь в показателе стоит алгебраическая сумма моментов частиц, вообще говоря, отличная от их «векторной суммы», т. е. момента L системы.

Если замкнутая система распадается на части (под влиянием действующих в ней самой сил), то ее полные момент и четность должны сохраняться. Это обстоятельство может сделать невозможным распад системы, даже если он возможен в энергетическом отношении.

Рассмотрим, например, атом, находящийся в четном состоянии с моментом $L = 0$, причем энергетически он мог бы распасться на свободный электрон и ион в нечетном состоянии с тем же моментом $L = 0$. Легко видеть, что фактически такой распад не может произойти (будет, как говорят, *запрещен*). Действительно, в силу закона сохранения момента свободный электрон должен был бы тоже обладать равным нулю моментом и потому находиться в четном состоянии ($P = (-1)^0 = +1$), но в этом случае состояние системы ион + свободный электрон был бы нечетным, между тем как первоначальное состояние атома было четным.