где F — вырожденная гипергеометрическая функция, $|m| = 0, 1, \ldots, l$, а l пробегает значения $0, 2, \ldots, n$ для четных n и $1, 3, \ldots, n$ — для нечетных n; последнее очевидно из сопоставления четности $(-1)^n$ функций (5) и четности $(-1)^l$ функций (6), которые должны быть одинаковыми. Этим определяются возможные значения орбитального момента, соответствующие рассматриваемым уровням энергии.

Последовательность уровней пространственного осциллятора (в тех же обозначениях, что и в задачах 2, 3), следовательно, такова:

$$(1s),\quad (1p),\quad (1d,\ 2s),\quad (1f,\ 2p),\quad (1g,\ 2d,\ 3s), \ldots,$$

где в скобки заключены взаимно вырожденные состояния [1]).

§ 34. Разложение плоской волны

Рассмотрим свободную частицу, движущуюся с определенным импульсом $p = k\hbar$ в положительном направлении оси z. Волновая функция такой частицы имеет вид

$$\psi = \mathrm{const}\cdot e^{ikz}.$$

Разложим эту функцию по волновым функциям ψ_{klm} свободного движения с определенными моментами. Поскольку в рассматриваемом состоянии энергия имеет определенное значение $E = k^2\hbar^2/2m$, то ясно, что в искомое разложение войдут только функции с тем же k. Далее, поскольку функция e^{ikz} обладает аксиальной симметрией вокруг оси z, то в ее разложение могут войти только функции, не зависящие от угла φ, т. е. функции с $m = 0$. Таким образом, должно быть:

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \psi_{kl0} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l R_{kl} Y_{l0},$$

где a_l — постоянные. Подставив выражения (28,8) и (33,9) для функций Y_{l0} и R_{kl}, получим

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} C_l P_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{k}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l \frac{\sin kr}{kr} \qquad (z = r\cos\theta),$$

где C_l — другие постоянные. Эти постоянные удобно определить, сравнив коэффициенты при $(r\cos\theta)^n$ в разложениях обеих сторон равенства по степеням r. В правой стороне равенства такой член имеется только в n-м слагаемом; при $l > n$ разложение радиальной функции начинается с более высоких степеней r, а при $n > l$ полином $P_l(\cos\theta)$ содержит более низкие степени $\cos\theta$. Член с $\cos^l\theta$ в $P_l(\cos\theta)$ имеет коэффициентом $(2l)!/2^l(l!)^2$ (см. форму-

[1]) Обратим внимание на взаимное вырождение уровней с различными моментами l; см. по этому поводу примечание на стр. 160.

лу (с, 1)). Пользуясь также формулой (33,13), найдем интересующий нас член разложения правой стороны равенства

$$(-1)^l C_l \frac{(2l)!\,(kr\cos\theta)^l}{2^l\,(l!)^2\,1\cdot 3\ldots(2l+1)}.$$

В левой стороне равенств соответствующий (в разложении $e^{ikr\cos\theta}$) член есть

$$\frac{(ikr\cos\theta)^l}{l!}.$$

Приравнивая обе величины, найдем $C_l = (-i)^l\,(2l+1)$. Таким образом окончательно получаем искомое разложение

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty}(-i)^l\,(2l+1)\,P_l(\cos\theta)\left(\frac{r}{k}\right)^l\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^l\frac{\sin kr}{kr}. \qquad (34,1)$$

На больших расстояниях оно принимает асимптотическую форму

$$e^{ikz} \approx \frac{1}{kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^l\,(2l+1)\,P_l(\cos\theta)\sin\left(kr-\frac{l\pi}{2}\right). \qquad (34,2)$$

В (34,1) ось z выбрана в направлении волнового вектора плоской волны $\mathbf{k}$. Это разложение можно записать и в более общем виде, не предполагающем определенного выбора координатных осей. Для этого надо воспользоваться теоремой сложения шаровых функций (см. (с, 11)), выразив с ее помощью полиномы $P_l(\cos\theta)$ через шаровые функции от направлений $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ (угол между которыми и есть θ). Тогда получим

$$e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr)\,Y^*_{lm}\left(\frac{\mathbf{k}}{k}\right)Y_{lm}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right). \qquad (34,3)$$

Функции $j_l(kr)$ (определенные согласно (33,11)) зависят только от произведения kr, и тем самым ясно видна симметрия формулы по отношению к векторам $\mathbf{k}$ и $\mathbf{r}$ (у которой из двух шаровых функций стоит знак комплексного сопряжения — безразлично).

Нормируем волновую функцию e^{ikz} на равную единице плотность потока вероятности, т. е. так, чтобы она соответствовала потоку частиц (параллельному оси z), через единицу площади сечения которого проходит в единицу времени одна частица. Такая функция есть

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{v}}e^{ikz} = \sqrt{\frac{m}{k\hbar}}\,e^{ikz} \qquad (34,4)$$

(v — скорость частиц; см. (19,7)). Умножая обе стороны равенства (34,1) на $\sqrt{m/k\hbar}$ и вводя в правой его стороне нормированные функции $\psi_{klm}^{\pm} = R_{kl}^{\pm}(r)\, Y_{lm}(\theta, \varphi)$, получим

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\pi(2l+1)}\, \frac{1}{ik} (\psi_{kl0}^{+} - \psi_{kl0}^{-}).$$

Квадрат модуля коэффициента при ψ_{kl0}^{-} (или ψ_{kl0}^{+}) в этом разложении определяет, согласно общим правилам, вероятность того, что частица в падающем на центр (или расходящемся из центра) потоке будет обладать моментом l (относительно начала координат). Поскольку волновая функция $e^{ikz}/\sqrt{v}$ соответствует потоку частиц с равной единице плотностью, то эта «вероятность» обладает размерностью квадрата длины; она может быть наглядно истолкована как величина «прицельной площади» (в плоскости x, y), на которую должна попасть падающая частица, в случае если ее момент равен l. Обозначая эту величину посредством σ_l, имеем

$$\sigma_l = \frac{\pi}{k^2}(2l+1). \tag{34,5}$$

При больших значениях l сумма прицельных площадей по интервалу Δl значений l (такому, что $1 \ll \Delta l \ll l$) равна

$$\sum_{\Delta l} \sigma_l \approx \frac{\pi}{k^2} 2l\, \Delta l = 2\pi \frac{l\hbar^2}{p^2}\, \Delta l.$$

При подстановке классического выражения для момента $\hbar l = \rho p$ (где ρ — так называемое прицельное расстояние) это выражение переходит в

$$2\pi\rho\Delta\rho,$$

что совпадает с классическим выражением. Это обстоятельство не случайно: мы увидим в дальнейшем, что при больших значениях l движение квазиклассично (§ 49).

Задача

Разложить плоскую волну по волновым функциям состояний с определенными значениями проекции m момента на ось y и проекцией p_y импульса на ту же ось.

Решение. Введем цилиндрическую систему координат y, ρ, φ с осью вдоль оси y. Волновые функции указанных состояний будут иметь вид $Q_m(\rho) \times$ $\times\, e^{im\varphi} e^{ip_y y/\hbar}$. Если отсчитывать угол φ от оси z, разложение можно записать в виде:

$$e^{ikz} = e^{ik\rho\cos\varphi} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q_m(\rho)\, e^{im\varphi}$$

(в данном случае $p_y = 0$), откуда

$$Q_m(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k\rho\cos\varphi - m\varphi)}\, d\varphi = i^m J_m(k\rho),$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя. При $k\rho \gg 1$ для Q_m справедливо асимптотическое выражение:

$$Q_m(\rho) \approx i^m \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \sin\left[k\rho - \frac{\pi}{2}(m - 1/2)\right].$$

§ 35. Падение частицы на центр

Для выяснения некоторых особенностей квантовомеханического движения полезно изучить случай, не имеющий, правда, непосредственного физического смысла, — движение частицы в поле с потенциальной энергией, обращающейся в некоторой точке (начале координат) в бесконечность по закону $U(r) \approx -\beta/r^2$ ($\beta > 0$); вид поля вдали от начала координат нас не будет интересовать. Мы видели в § 18, что этот случай — как раз промежуточный между теми, когда имеются обычные стационарные состояния, и случаями, когда происходит «падение» частицы в начало координат.

Вблизи начала координат уравнение Шредингера в рассматриваемом случае будет следующим:

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \frac{\gamma}{r^2} R = 0 \tag{35,1}$$

($R(r)$ — радиальная часть волновой функции), где введена постоянная

$$\gamma = \frac{2m\beta}{\hbar^2} - l(l+1) \tag{35,2}$$

и опущены все члены более низкого порядка по $1/r$; значение энергии E предполагается конечным, и потому соответствующий член в уравнении тоже опущен.

Ищем R в виде $R \sim r^s$; тогда получаем для s квадратное уравнение

$$s(s+1) + \gamma = 0$$

с двумя корнями

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}, \qquad s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}. \tag{35,3}$$

Для дальнейшего исследования удобно поступить следующим образом. Выделим вокруг начала координат малую область радиуса r_0 и заменим функцию $-\gamma/r^2$ в этой области постоянной величиной $-\gamma/r_0^2$. Определив волновые функции в таком «обрезан-