(в данном случае $p_y = 0$), откуда

$$Q_m(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k\rho\cos\varphi - m\varphi)}\,d\varphi = i^m J_m(k\rho),$$

где $J_m(x)$ — функция Бесселя. При $k\rho \gg 1$ для Q_m справедливо асимптотическое выражение:

$$Q_m(\rho) \approx i^m \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\sin\left[k\rho - \frac{\pi}{2}(m - 1/2)\right].$$

§ 35. Падение частицы на центр

Для выяснения некоторых особенностей квантовомеханического движения полезно изучить случай, не имеющий, правда, непосредственного физического смысла, — движение частицы в поле с потенциальной энергией, обращающейся в некоторой точке (начале координат) в бесконечность по закону $U(r) \approx -\beta/r^2$ ($\beta > 0$); вид поля вдали от начала координат нас не будет интересовать. Мы видели в § 18, что этот случай — как раз промежуточный между теми, когда имеются обычные стационарные состояния, и случаями, когда происходит «падение» частицы в начало координат.

Вблизи начала координат уравнение Шредингера в рассматриваемом случае будет следующим:

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{\gamma}{r^2}R = 0 \qquad (35,1)$$

($R(r)$ — радиальная часть волновой функции), где введена постоянная

$$\gamma = \frac{2m\beta}{\hbar^2} - l(l+1) \qquad (35,2)$$

и опущены все члены более низкого порядка по $1/r$; значение энергии E предполагается конечным, и потому соответствующий член в уравнении тоже опущен.

Ищем R в виде $R \sim r^s$; тогда получаем для s квадратное уравнение

$$s(s+1) + \gamma = 0$$

с двумя корнями

$$s_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}, \qquad s_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \gamma}. \qquad (35,3)$$

Для дальнейшего исследования удобно поступить следующим образом. Выделим вокруг начала координат малую область радиуса r_0 и заменим функцию $-\gamma/r^2$ в этой области постоянной величиной $-\gamma/r_0^2$. Определив волновые функции в таком «обрезанном» поле, мы затем посмотрим, что получается при переходе к пределу $r_0 \to 0$.

Предположим сначала, что $\gamma < 1/4$. Тогда s_1 и s_2 — вещественные отрицательные числа, причем $s_1 > s_2$. При $r > r_0$ общее решение уравнения Шредингера имеет вид (речь идет везде о малых r)

$$R = Ar^{s_1} + Br^{s_2} \tag{35,4}$$

(A, B — постоянные). При $r < r_0$ решение уравнения

$$R'' + \frac{2}{r}R' + \frac{\gamma}{r_0^2}R = 0,$$

конечное в начале координат, имеет вид

$$R = C\frac{\sin kr}{r}, \qquad k = \frac{\sqrt{\gamma}}{r_0}. \tag{35,5}$$

При $r = r_0$ функция R и ее производная R' должны быть непрерывными функциями. Удобно написать одно из условий в виде условия непрерывности логарифмической производной от rR. Это приводит к уравнению

$$\frac{A(s_1+1)r_0^{s_1} + B(s_2+1)r_0^{s_2}}{Ar_0^{s_1+1} + Br_0^{s_2+1}} = k \operatorname{ctg} kr_0$$

или

$$\frac{A(s_1+1)r_0^{s_1} + B(s_2+1)r_0^{s_2}}{Ar_0^{s_1} + Br_0^{s_2}} = \sqrt{\gamma}\operatorname{ctg}\sqrt{\gamma}.$$

Решенное относительно отношения B/A, это уравнение дает выражение вида

$$\frac{B}{A} = \mathrm{const}\cdot r_0^{s_1-s_2}. \tag{35,6}$$

Переходя теперь к пределу $r_0 \to 0$, находим, что $B/A \to 0$ (напоминаем, что $s_1 > s_2$). Таким образом, из двух расходящихся в начале координат решений уравнения Шредингера (35,1) должно быть выбрано то, которое обращается в бесконечность менее быстро:

$$R = A\frac{1}{r^{|s_1|}}. \tag{35,7}$$

Пусть теперь $\gamma > 1/4$. Тогда s_1 и s_2 комплексны:

$$s_1 = -\frac{1}{2} + i\sqrt{\gamma - \frac{1}{4}}, \qquad s_2 = s_1^*.$$

Повторяя предыдущие рассуждения, снова придем к равенству (35.6), которое при подстановке значений s_1 и s_2 дает

$$\frac{B}{A} = \text{const}\cdot r_0^{i\sqrt{4\gamma-1}}. \tag{35,8}$$

При $r_0 \to 0$ это выражение не стремится ни к какому определенному пределу, так что прямой переход к пределу $r_0 \to 0$ невозможен. С учетом (35,8) общий вид вещественного решения может быть написан следующим образом:

$$R = \text{const}\cdot\frac{1}{\sqrt{r}}\cos\left(\sqrt{\gamma-\frac{1}{4}}\ln\frac{r}{r_0}+\text{const}\right). \tag{35,9}$$

Эта функция обладает нулями, число которых неограниченно растет с уменьшением r_0. Поскольку, с одной стороны, выражение (35,9) справедливо для волновой функции (при достаточно малых r) при любом конечном значении энергии E частицы, а, с другой стороны, волновая функция нормального состояния совсем не должна иметь нулей, то мы можем заключить, что «нормальное состояние» частицы в рассматриваемом поле соответствует энергии $E = -\infty$. Но во всяком состоянии дискретного спектра частица находится в основном в области пространства, в которой $E > U$. Поэтому при $E \to -\infty$ частица находится в бесконечно малой области вокруг начала координат, т. е. происходит «падение» частицы на центр.

«Критическое» поле $U_{\text{кр}}$, при котором становится возможным падение частицы на центр, соответствует значению $\gamma = 1/4$. Наименьшее значение коэффициента при $-1/r^2$ получается, когда $l = 0$, т. е.

$$U_{\text{кр}} = -\frac{\hbar^2}{8mr^2}. \tag{35,10}$$

Из формулы (35,3) (для s_1) видно, что допускаемое решение уравнения Шредингера (вблизи точки, где $U \sim 1/r^2$) расходится при $r \to 0$ не быстрее чем $1/\sqrt{r}$. Если поле обращается при $r \to 0$ в бесконечность медленнее чем $1/r^2$, то в уравнении Шредингера в области вблизи начала координат можно вовсе пренебречь $U(r)$ по сравнению с остальными членами, и мы получим те же решения, что и для свободного движения, т. е. $\psi \sim r^l$ (см. § 33). Наконец, если поле обращается в бесконечность быстрее чем $1/r^2$ (как $-1/r^s$ с $s > 2$), то волновая функция вблизи начала координат пропорциональна $r^{s/4-1}$ (см. задачу к § 49). Во всех этих случаях произведение $r\psi$ обращается при $r = 0$ в нуль.

Далее, исследуем свойства решений уравнения Шредингера в поле, спадающем на больших расстояниях по закону $U \approx -\beta/r^2$ при произвольном его виде на малых расстояниях. Предположим сначала, что $\gamma < 1/4$. Легко видеть, что в этом случае может существовать лишь конечное число отрицательных уровней энергии [1]). Действительно, при энергии $E = 0$ уравнение Шредингера на больших расстояниях имеет вид (35,1) с общим решением (35,4). Но функция (35,4) не имеет (при $r \neq 0$) нулей; поэтому все нули искомой радиальной волновой функции лежат на конечных расстояниях от начала координат и их число, во всяком случае, конечно. Другими словами, порядковый номер уровня $E = 0$, замыкающего дискретный спектр, конечен.

Если же $\gamma > 1/4$, то дискретный спектр содержит бесконечное число отрицательных уровней энергии. Действительно, волновая функция состояния с $E = 0$ имеет на больших расстояниях вид (35,9) с бесконечным числом нулей, так что ее порядковый номер во всяком случае бесконечен.

Наконец, пусть поле $U = -\beta/r^2$ во всем пространстве. Тогда при $\gamma > 1/4$ происходит падение частицы. Если же $\gamma < 1/4$, то отрицательные уровни энергии отсутствуют вовсе. Действительно, волновая функция состояния с $E = 0$ будет во всем пространстве вида (35,7); она не имеет вовсе нулей на конечных расстояниях, т. е. соответствует наиболее низкому (при данном l) уровню энергии.

§ 36. Движение в кулоновом поле (сферические координаты)

Очень важным случаем движения в центрально-симметричном поле является движение в *кулоновом поле*

$$U = \pm \frac{\alpha}{r}$$

(α — положительная постоянная). Мы будем рассматривать сначала кулоново притяжение, соответственно чему будем писать $U = -\alpha/r$. Из общих соображений заранее очевидно, что спектр отрицательных собственных значений энергии будет дискретным (с бесконечным числом уровней), а спектр положительных энергий — непрерывным.

Уравнение (32,8) для радиальных функций имеет вид

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2}R + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{\alpha}{r}\right)R = 0. \qquad (36,1)$$

Если речь идет об относительном движении двух притягивающихся частиц, то под m надо подразумевать их приведенную массу.

В вычислениях, связанных с кулоновым полем, удобно пользоваться вместо обычных особыми единицами для измерения всех величин, которые мы будем называть *кулоновыми единицами*.

[1]) Предполагается, что при малых r поле таково, что падения частицы не происходит.