Решение. Имеется только дискретный спектр. Уравнение Шредингера будет следующим:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}-\frac{A}{r^2}-Br^2\right)R=0.$$

Вводя переменную

$$\xi=\frac{\sqrt{2mB}}{\hbar}r^2$$

и обозначения

$$l(l+1)+\frac{2mA}{\hbar^2}=2s(2s+1),$$

$$\sqrt{\frac{2m}{B}}\frac{E}{\hbar}=4(n+s)+3,$$

получаем уравнение

$$\xi R''+\frac{3}{2}R'+\left[n+s+\frac{3}{4}-\frac{\xi}{4}-\frac{s\left(s+\frac{1}{2}\right)}{\xi}\right]R=0.$$

Искомое решение ведет себя при $\xi\to\infty$ асимптотически, как $e^{-\xi/2}$, а при малых ξ пропорционально ξ^s, где под s надо понимать положительное значение

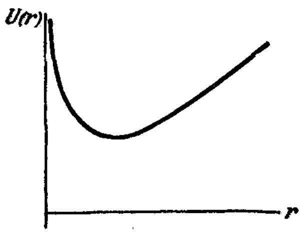

Рис. 12

$$s=\frac{1}{4}\left[-1+\sqrt{(2l+1)^2+\frac{8mA}{\hbar^2}}\right].$$

Поэтому ищем решение в виде

$$R=e^{-\xi/2}\xi^s w$$

и получаем для w уравнение

$$\xi w''+\left(2s+\frac{3}{2}-\xi\right)w'+nw=0,$$

откуда

$$w=F\left(-n,\ 2s+\frac{3}{2},\ \xi\right),$$

причем n должно быть целым неотрицательным числом. Для уровней энергии получаем, следовательно, бесконечное множество равноотстоящих значений

$$E_n=\hbar\sqrt{\frac{B}{2m}}\left[4n+2+\sqrt{(2l+1)^2+\frac{8mA}{\hbar^2}}\right],\qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

§ 37. Движение в кулоновом поле (параболические координаты)

Разделение переменных в уравнении Шредингера, написанном в сферических координатах, всегда возможно для движения в любом центрально-симметричном поле. В случае кулонова поля разделение переменных оказывается возможным также и в так называемых *параболических* координатах. Решение задачи о движении в кулоновом поле в параболических координатах полезно при исследовании ряда задач, в которых определенное направление в пространстве является выделенным, например, благодаря наличию внешнего (помимо кулонова) электрического поля (§ 77).

Параболические координаты ξ, η, φ определяются формулами

$$x=\sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\qquad y=\sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\qquad z=\frac{1}{2}(\xi-\eta),$$
$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}(\xi+\eta) \tag{37,1}$$

или обратно:

$$\xi=r+z,\qquad \eta=r-z,\qquad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}; \tag{37,2}$$

ξ и η пробегают значения от 0 до ∞, φ — от 0 до 2π. Поверхности $\xi=\mathrm{const}$ и $\eta=\mathrm{const}$ представляют собой параболоиды вращения с осью вдоль оси z и фокусом в начале координат. Эта система координат ортогональна. Элемент длины определяется выражением

$$dl^2=\frac{\xi+\eta}{4\xi}d\xi^2+\frac{\xi+\eta}{4\eta}d\eta^2+\xi\eta\, d\varphi^2, \tag{37,3}$$

а элемент объема:

$$dV=\frac{1}{4}(\xi+\eta)\,d\xi\, d\eta\, d\varphi. \tag{37,4}$$

Из (37,3) следует для оператора Лапласа выражение

$$\Delta=\frac{4}{\xi+\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \tag{37,5}$$

Уравнение Шредингера для частицы в кулоновом поле притяжения

$$U=-\frac{1}{r}=-\frac{2}{\xi+\eta}$$

приобретает вид

$$\frac{4}{\xi+\eta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)\right]+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+$$
$$+2\left(E+\frac{2}{\xi+\eta}\right)\psi=0. \tag{37,6}$$

Ищем собственные функции ψ в виде

$$\psi=f_1(\xi)f_2(\eta)e^{im\varphi}, \tag{37,7}$$

где m — магнитное квантовое число. Подставляя это выражение в уравнение (37,6), умноженное на $(\xi+\eta)/4$, и разделяя переменные ξ и η, получим для f_1 и f_2 уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{df_1}{d\xi}\right)+\left[\frac{E}{2}\xi-\frac{m^2}{4\xi}+\beta_1\right]f_1=0,\\ &\frac{d}{d\eta}\left(\eta\frac{df_2}{d\eta}\right)+\left[\frac{E}{2}\eta-\frac{m^2}{4\eta}+\beta_2\right]f_2=0, \end{aligned} \tag{37,8}$$

где «параметры разделения» β_1, β_2 связаны друг с другом посредством

$$\beta_1+\beta_2=1. \tag{37,9}$$

Рассмотрим дискретный спектр энергии ($E<0$). Вводим вместо E, ξ, η величины

$$n=\frac{1}{\sqrt{-2E}},\qquad \rho_1=\xi\sqrt{-2E}=\frac{\xi}{n},\qquad \rho_2=\frac{\eta}{n}, \tag{37,10}$$

после чего получаем уравнение для f_1:

$$\frac{d^2f_1}{d\rho_1^2}+\frac{1}{\rho_1}\frac{df_1}{d\rho_1}+\left[-\frac{1}{4}+\frac{1}{\rho_1}\left(\frac{|m|+1}{2}+n_1\right)-\frac{m^2}{4\rho_1^2}\right]f_1=0 \tag{37,11}$$

и такое же уравнение для f_2, причем мы ввели также обозначения

$$n_1=-\frac{|m|+1}{2}+n\beta_1,\qquad n_2=-\frac{|m|+1}{2}+n\beta_2. \tag{37,12}$$

Подобно тому как было сделано для уравнения (36,4), находим, что f_1 ведет себя при больших ρ_1, как $e^{-\rho_1/2}$, а при малых ρ_1 — как $\rho_1^{|m|/2}$. Соответственно этому, ищем решение уравнения (37,11) в виде

$$f_1(\rho_1)=e^{-\rho_1/2}\rho_1^{|m|/2}w_1(\rho_1)$$

(и аналогично для f_2) и получаем для w_1 уравнение

$$\rho_1w_1''+(|m|+1-\rho_1)w_1'+n_1w_1=0.$$

Это — снова уравнение вырожденной гипергеометрической функции. Решение, удовлетворяющее условиям конечности, будет

$$w_1=F(-n_1,\ |m|+1,\ \rho_1),$$

причем n_1 должно быть целым неотрицательным числом.

Таким образом, каждое стационарное состояние дискретного спектра определяется в параболических координатах тремя целыми числами: «параболическими квантовыми числами» n_1 и n_2 и магнитным квантовым числом m. Для числа n («главное квантовое число») имеем из (37,9) и (37,12)

$$n=n_1+n_2+|m|+1. \tag{37,13}$$

Для уровней энергии получается, разумеется, прежний результат (36,9).

При заданном n число $|m|$ может принимать n различных значений от 0 до $n-1$. При фиксированных n и $|m|$ число n_1 пробегает $n-|m|$ значений от 0 до $n-|m|-1$. Учитывая также, что при заданном $|m|$ можно еще выбрать функции с $m = \pm|m|$, найдем, что всего для данного n имеется

$$2\sum_{m=1}^{n-1}(n-m)+(n-0)=n^2$$

различных состояний в согласии с полученным в § 36 результатом.

Волновые функции $\psi_{n_1n_2m}$ дискретного спектра должны быть нормированы условием

$$\int |\psi_{n_1n_2m}|^2 dV = \frac{1}{4}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^{2\pi} |\psi_{n_1n_2m}|^2(\xi+\eta)\,d\varphi\,d\xi\,d\eta = 1. \tag{37,14}$$

Нормированные функции имеют вид

$$\psi_{n_1n_2m} = \frac{\sqrt{2}}{n^2} f_{n_1m}\left(\frac{\xi}{n}\right) f_{n_2m}\left(\frac{\eta}{n}\right)\frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}, \tag{37,15}$$

где

$$f_{pm}(\rho) = \frac{1}{|m|!}\sqrt{\frac{(p+|m|)!}{p!}}\,F(-p,\,|m|+1,\,\rho)\,e^{-\rho/2}\rho^{|m|/2}. \tag{37,16}$$

Волновые функции в параболических координатах, в противоположность волновым функциям в сферических координатах, не симметричны относительно плоскости $z=0$. При $n_1 > n_2$ вероятность нахождения частицы на стороне $z>0$ больше, чем на стороне $z<0$, а при $n_1<n_2$ — наоборот.

Непрерывному спектру ($E>0$) соответствует непрерывный спектр вещественных значений параметров β_1, β_2 в уравнениях (37,8) (разумеется, по-прежнему связанных соотношением (37,9)); мы не станем выписывать здесь соответствующих волновых функций. Уравнения (37,8), рассматриваемые как уравнения для «собственных значений» величин β_1, β_2, обладают (при $E>0$) также и спектром комплексных значений. Соответствующие волновые функции будут выписаны в § 135, где мы воспользуемся ими для решения задачи о рассеянии в кулоновом поле.

Существование стационарных состояний $|n_1n_2m\rangle$ связано с наличием дополнительного закона сохранения (36,29). В этих состояниях имеют определенные значения, наряду с энергией, величины $l_z = m$ и A_z. Вычислив диагональные матричные элементы оператора $\hat{A}_z$, найдем, что

$$A_z = \frac{n_1-n_2}{n}. \tag{37,17}$$

При этом $u_z = n_1 - n_2$, а проекции «моментов» $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$:

$$j_{1z} = \frac{1}{2}(m + n_1 - n_2) \equiv \mu_1, \quad j_{2z} = \frac{1}{2}(m - n_1 + n_2) \equiv \mu_2. \qquad (37,18)$$

Эти свойства состояний $|n_1 n_2 m\rangle$ (или, что то же, $|n\mu_1\mu_2\rangle$) позволяют легко установить связь между их волновыми функциями и волновыми функциями состояний $|nlm\rangle$. Поскольку $\mathbf{l} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$, то переход от одного из этих способов описания к другому сводится к задаче о составлении волновых функций при сложении двух моментов (рассмотренной ниже, в § 106). В терминах «моментов» $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$ состояния $|nlm\rangle$ и $|n_1 n_2 m\rangle$ описываются как $|j_1 j_2 l m\rangle$ и $|j_1 j_2 \mu_1 \mu_2\rangle$, где, согласно (36,35) и (37,13),

$$j_1 = j_2 = \frac{n-1}{2} = \frac{n_1 + n_2 + |m|}{2}. \qquad (37,19)$$

Согласно общим формулам (106,9)—(106,11) имеем

$$\begin{aligned} \psi_{nlm} &= \sum_{\mu_1+\mu_2=m} \langle lm | \mu_1\mu_2 \rangle \psi_{n\mu_1\mu_2}, \\ \psi_{n\mu_1\mu_2} &= \sum_{l=0}^{n-1} \langle l, \mu_1 + \mu_2 | \mu_1\mu_2 \rangle \psi_{nlm} \end{aligned} \qquad (37,20)$$

(*D. Park*, 1960).