интегрирования по dE_ν вообще не существен и его можно производить непосредственно вдоль вещественной оси).

О состояниях ν, для которых $V_{f\nu}$ и $V_{\nu i}$ отличны от нуля, часто говорят, как о *промежуточных* для перехода $i \to f$. Наглядно можно сказать, что этот переход осуществляется как бы в два этапа: $i \to \nu$ и $\nu \to f$ (разумеется, однако, такому описанию не следует придавать буквального смысла). Может оказаться, что переход $i \to f$ возможен не через одно, а лишь через несколько последовательных промежуточных состояний. Формула (43,7) непосредственно обобщается на такие случаи. Так, если необходимы два промежуточных состояния, то

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\int \frac{V_{f\nu'}V_{\nu'\nu}V_{\nu i}}{(E_i - E_{\nu'})(E_i - E_\nu)}\,d\nu\,d\nu'\right|^2 \delta(E_f - E_i)\,d\nu_f. \qquad (43,8)$$

Наконец, для уяснения математического смысла интегралов взятых по пути вида (43,4), укажем формулу

$$\int \frac{f(x)\,dx}{x - a - i0} = \fint \frac{f(x)\,dx}{x - a} + i\pi f(a), \qquad (43,9)$$

где интегрирование производится по отрезку вещественной оси, включающему в себя точку $x = a$. Действительно, производя обход полюса $x = a$ по полуокружности (радиуса ρ), найдем, что весь интеграл равен сумме интегралов по вещественной оси от нижнего предела до $a - \rho$ и от $a + \rho$ до верхнего предела и (умноженного на $i\pi$) вычета подынтегрального выражения в полюсе. В пределе $\rho \to 0$ интегралы по вещественной оси складываются в интеграл по всему отрезку, понимаемый в смысле главного значения (что и отмечено перечеркнутым знаком интегрирования), и мы приходим к (43,9). Эту формулу записывают также и в символическом виде

$$\frac{1}{x - a - i0} = P\,\frac{1}{x - a} + i\pi\delta(x - a); \qquad (43,10)$$

символ P означает, что при интегрировании функции $f(x)/(x - a)$ должно быть взято главное значение интеграла.

§ 44. Соотношение неопределенности для энергии

Рассмотрим систему, состоящую из двух слабо взаимодействующих частей. Предположим, что в некоторый момент времени известно, что эти части обладают определенными значениями энергии, которые мы обозначим соответственно как E и ε. Пусть через некоторый интервал времени Δt производится снова измерение энергии; оно дает некоторые значения E', ε', вообще говоря, отличные от E, ε. Легко определить, каков порядок величины наиболее вероятного значения разности $E' + \varepsilon' - E - \varepsilon$, которая будет обнаружена в результате измерения.

Согласно формуле (42,3) (с $\omega = 0$) вероятность перехода системы (за время t) под влиянием не зависящего от времени возмущения из состояния с энергией E в состояние с энергией E' пропорциональна

$$\frac{\sin^2 \frac{E' - E}{2\hbar} t}{(E' - E)^2}.$$

Отсюда видно, что наиболее вероятное значение разности $E' - E$ порядка величины $\hbar/t$.

Применив этот результат к рассматриваемому нами случаю (возмущением является взаимодействие между частями системы), мы получим соотношение

$$|E + \varepsilon - E' - \varepsilon'| \Delta t \sim \hbar. \tag{44,1}$$

Таким образом, чем меньше интервал времени Δt, тем большее изменение энергии будет обнаружено. Существенно, что его порядок величины $\hbar/\Delta t$ не зависит от величины возмущения. Определяемое соотношением (44,1) изменение энергии будет обнаружено даже при сколь угодно слабом взаимодействии между обеими частями системы. Этот результат является чисто квантовым и имеет глубокий физический смысл. Он показывает, что в квантовой механике закон сохранения энергии может быть проверен посредством двух измерений лишь с точностью до величины порядка $\hbar/\Delta t$, где Δt — интервал времени между измерениями.

О соотношении (44,1) часто говорят, как о соотношении неопределенности для энергии. Необходимо, однако, подчеркнуть, что его смысл существенно отличается от смысла соотношения неопределенности $\Delta p\, \Delta x \sim \hbar$ для координаты и импульса. В последнем Δp и Δx — неопределенности в значениях импульса и координаты в один и тот же момент; оно показывает, что эти две величины вообще не могут иметь одновременно строго определенных значений. Энергии же E, ε, напротив, могут быть измерены в каждый данный момент времени с любой точностью. Величина $(E + \varepsilon) - (E' + \varepsilon')$ в (44,1) есть разность двух точно измеренных значений энергии $E + \varepsilon$ в два различных момента времени, а отнюдь не неопределенность в значении энергии в определенный момент времени.

Если рассматривать E как энергию некоторой системы, а ε — как энергию «измерительного прибора», то мы можем сказать, что энергия взаимодействия между ними может быть учтена лишь с точностью до $\hbar/\Delta t$. Обозначим посредством ΔE, $\Delta\varepsilon$, ... погрешности в измерениях соответствующих величин. В благоприятном случае, когда ε, ε' известны точно ($\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon' = 0$), имеем

$$\Delta(E - E') \sim \frac{\hbar}{\Delta t}. \tag{44,2}$$

Из этого соотношения можно вывести важные следствия относительно измерения импульса. Процесс измерения импульса частицы (будем говорить для определенности об электроне) включает в себя столкновение электрона с некоторой другой («измерительной») частицей, импульсы которой до и после столкновения могут считаться известными точно [1]). Если применить к этому столкновению закон сохранения импульса, то мы получим три уравнения (три компоненты одного векторного уравнения) с шестью неизвестными — компонентами импульса электрона до и после столкновения. Для увеличения числа уравнений можно произвести ряд последовательных столкновений электрона с «измерительными» частицами и применить закон сохранения импульса к каждому из них. При этом, однако, увеличивается и число неизвестных (импульсы электрона между столкновениями), и легко сообразить, что при любом числе столкновений число неизвестных будет превышать на три число уравнений. Поэтому для измерения импульса электрона необходимо привлечь, наряду с законом сохранения импульса, также и закон сохранения энергии в каждом столкновении. Последний, однако, может быть применен, как мы видели, лишь с точностью до величины порядка $\hbar/\Delta t$, где Δt — время между началом и концом рассматриваемого процесса.

Для упрощения дальнейших рассуждений удобно рассмотреть идеализированный мысленный эксперимент, в котором «измерительной частицей» является идеально отражающее плоское зеркало; тогда играет роль лишь одна компонента импульса, перпендикулярная к плоскости зеркала. Для определения импульса P частицы законы сохранения импульса и энергии дают уравнения

$$p' + P' - p - P = 0, \tag{44,3}$$

$$|\varepsilon' + E' - \varepsilon - E| \sim \frac{\hbar}{\Delta t} \tag{44,4}$$

(P, E — импульс и энергия частицы, p, ε — то же для зеркала; величины без и со штрихами относятся соответственно к моментам до и после столкновения). Величины p, p', ε, ε', относящиеся к «измерительной частице», могут рассматриваться как известные

[1]) Для производимого здесь анализа несущественно, каким образом становится известной энергия «измерительной» частицы.

точно, т. е. их погрешности равны нулю. Тогда для погрешностей в остальных величинах имеем из написанных уравнений

$$\Delta P = \Delta P', \quad |\Delta E' - \Delta E| \sim \frac{\hbar}{\Delta t}.$$

Но

$$\Delta E = \frac{\partial E}{\partial P}\Delta P = v\,\Delta P,$$

где v — скорость электрона (до столкновения), и аналогично

$$\Delta E' = v'\,\Delta P' = v'\,\Delta P.$$

Поэтому получаем

$$|(v'_x - v_x)\,\Delta P_x| \sim \frac{\hbar}{\Delta t}. \qquad (44{,}5)$$

Мы приписали здесь индексы x у скоростей и импульса, с целью подчеркнуть, что это соотношение относится к каждой из их компонент в отдельности.

Это и есть искомое соотношение. Оно показывает, что измерение импульса электрона (при заданной степени точности ΔP) неизбежно связано с изменением его скорости (т. е. и самого импульса). Это изменение тем больше, чем короче длится самый процесс измерения. Изменение скорости может быть сделано сколь угодно малым лишь при $\Delta t \to \infty$, но измерения импульса, длящиеся в течение большого времени, вообще могут иметь смысл лишь для свободной частицы. Здесь в особенности ярко проявляется неповторимость измерения импульса через короткие промежутки времени и «двуликая» природа измерения в квантовой механике — необходимость различать между измеряемым значением величины и значением, создаваемым в результате процесса измерения [1]).

К приведенному в начале этого параграфа выводу, основанному на теории возмущений, можно подойти с другой точки зрения, применив его к распаду системы, происходящему под влиянием какого-либо возмущения. Пусть E_0 есть некоторый уровень энергии системы, вычисленный при полном пренебрежении возможностью ее распада. Посредством τ обозначим *продолжительность жизни* этого состояния системы, т. е. величину, обратную вероятности распада в единицу времени. Тогда тем же способом найдем, что

$$|E_0 - E - \varepsilon| \sim \hbar/\tau, \qquad (44{,}6)$$

где E, ε — энергии обеих частей, на которые распалась система. Но по сумме $E + \varepsilon$ можно судить об энергии системы до распада.

[1]) Соотношение (44,5), как и выяснение физического смысла соотношения неопределенности для энергии, принадлежит *Н. Бору* (1928).

Поэтому полученное соотношение показывает, что энергия способной к распаду системы в некотором *квазистационарном* состоянии может быть определена лишь с точностью до величины порядка $\hbar/\tau$. Эту величину обычно называют *шириной* Γ уровня. Таким образом

$$\Gamma \sim \hbar/\tau. \tag{44,7}$$

§ 45. Потенциальная энергия как возмущение

Особого рассмотрения заслуживает случай, когда в качестве возмущения может рассматриваться полная потенциальная энергия частицы во внешнем поле. Невозмущенное уравнение Шредингера есть тогда уравнение свободного движения частицы

$$\Delta\psi^{(0)} + k^2\psi^{(0)} = 0, \qquad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar} \tag{45,1}$$

и имеет решениями плоские волны. Энергетический спектр свободного движения непрерывен, так что мы имеем дело со своеобразным случаем теории возмущений в непрерывном спектре. Решение задачи удобнее получить здесь непосредственно, не прибегая к общим формулам.

Уравнение для поправки $\psi^{(1)}$ первого приближения к волновой функции гласит:

$$\Delta\psi^{(1)} + k^2\psi^{(1)} = \frac{2mU}{\hbar^2}\psi^{(0)} \tag{45,2}$$

(U — потенциальная энергия). Решение этого уравнения, как известно из электродинамики, может быть написано в виде «запаздывающих потенциалов», т. е. в виде [1])

$$\begin{gathered}\psi^{(1)}(x, y, z) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \psi^{(0)} U(x', y', z') e^{ikr}\frac{dV'}{r}, \\ dV' = dx'\,dy'\,dz', \quad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2.\end{gathered} \tag{45,3}$$

Выясним, каким условиям должно удовлетворять поле U для того, чтобы его можно было рассматривать как возмущение. Условие применимости теории возмущений заключается в требовании $\psi^{(1)} \ll \psi^{(0)}$. Пусть a есть порядок величины размеров области пространства, в котором поле заметно отличается от нуля. Предположим сначала, что энергия частицы настолько мала, что ak меньше или порядка единицы. Тогда множитель e^{ikr} в подынтегральном выражении в (45,3) несуществен при оценке порядка

[1]) Это есть частный интеграл уравнения (45,2), к которому может быть прибавлено еще любое решение уравнения без правой части (т. е. невозмущенного уравнения (45,1)).