

Вводя номера состояний

$$n_1 \approx (E_1/\hbar\omega), \quad n_2 \approx (E_2/\hbar\omega),$$

запишем ответ в виде

$$f_{12} \sim \frac{n_2^{n_2/2}}{n_1^{n_1/2}} \left( \frac{\beta\hbar}{m\omega^3} \right)^{\frac{n_2-n_1}{2}}.$$

Поскольку в решении существенны большие значения  $x$ , ответ справедлив для  $f(x)$  не слишком быстро растущей на бесконечности. Если  $f(x)$  представляет собой полином, то его степень должна быть мала по сравнению с  $(n_2 - n_1)$ .

## § 52. Вероятность перехода в квазиклассическом случае

Прохождение через потенциальный барьер является примером процесса, который в классической механике вообще невозможен. В квазиклассическом случае вероятность таких процессов экспоненциально мала. Соответствующий показатель экспоненты может быть определен следующим образом.

Рассматривая переход какой-либо системы из одного состояния в другое, решаем соответствующие классические уравнения движения и находим «траекторию» перехода, оказывающуюся, однако, комплексной в соответствии с неосуществимостью процесса в классической механике. В частности, оказывается, вообще говоря, комплексной «точка перехода»  $q_0$ , в которой имеет место формальный переход системы из одного состояния в другое; положение этой точки определяется классическими законами сохранения. Далее, вычисляем действие  $S_1(q_1, q_0) + S_2(q_0, q_2)$  для движения системы в первом состоянии от некоторого исходного положения  $q_1$  до «точки перехода»  $q_0$  и затем во втором состоянии от  $q_0$  до окончательного положения  $q_2$ . Искомая вероятность процесса определится тогда формулой

$$\omega \sim \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} [S_1(q_1, q_0) + S_2(q_0, q_2)] \right\}. \quad (52,1)$$

Если положение «точки перехода» неоднозначно, должно быть выбрано то из них, для которого показатель в (52,1) имеет наименьшее по абсолютной величине значение (в то же время, разумеется, это значение должно быть достаточно велико для того, чтобы формула (52,1) была вообще применима)<sup>1)</sup>.

Формула (52,1) находится в соответствии с полученным в предыдущем параграфе правилом вычисления квазиклассических

<sup>1)</sup> Если потенциальная энергия системы сама имеет особые точки, то эти точки тоже должны входить в число конкурирующих значений  $q_0$ .

матричных элементов. Следует, однако, подчеркнуть, что вычисление предэкспоненциального коэффициента в вероятности такого рода переходов по квадрату соответствующего матричного элемента было бы неправильным.

Основанный на формуле (52,1) метод *комплексных классических траекторий* имеет общий характер и применим к переходам в системах с любым числом степеней свободы (Л. Д. Ландау, 1932). Если точка перехода вещественна, но лежит в классически недоступной области, то (в простейшем случае одномерного движения) формула (52,1) совпадает с выражением (50,5) для вероятности прохождения через потенциальный барьер.

### Надбарьерное отражение

Применим (52,1) к одномерной задаче о надбарьерном отражении — отражению частицы с энергией, превосходящей высоту барьера. В этом случае под  $q_0$  надо понимать комплексную координату  $x_0$  «точки остановки», в которой частица меняет направление своего движения на обратное, т. е. комплексный корень уравнения  $U(x) = E$ . Покажем, каким образом в этом случае можно вычислить коэффициент отражения также и с большей точностью — вместе с предэкспоненциальным коэффициентом.

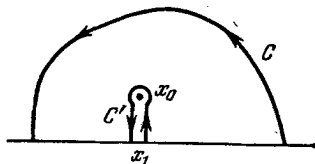


Рис. 19

Мы снова (как и в § 50) должны установить соответствие между волновыми функциями далеко справа (прошедшая волна) и далеко слева от барьера (падающая + отраженная волны). Это легко сделать способом, аналогичным примененному уже в § 47, 50, рассматривая  $\psi$  как функцию комплексной переменной  $x$ .

Напишем прошедшую волну в виде

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{p}} \exp \left( \frac{i}{\hbar} \int_{x_1}^x p dx \right)$$

(где  $x_1$  — какая-либо точка на вещественной оси) и проследим за ее изменением при обходе в верхней полуплоскости по пути  $C$ , огибающему (на достаточном удалении) точку поворота  $x_0$  (рис. 19); последняя часть этого пути должна проходить целиком в настолько удаленной влево области, чтобы вдоль нее погрешность приближенной (квазиклассической) волновой функции падающей волны была меньше искомой малой величины  $\psi_-$ . Обход точки  $x_0$  приводит к изменению знака корня  $\sqrt{E - U(x)}$  и по возвращении на вещественную ось функция  $\psi_+$  перейдет, следовательно, в волну

$\psi_-$ , распространяющуюся влево, т. е. в отраженную волну <sup>1)</sup>. Поскольку амплитуды падающей и прошедшей волн можно считать совпадающими, искомым коэффициентом отражения  $R$  определится просто как отношение квадратов модулей  $\psi_-$  и  $\psi_+$ :

$$R = \left| \frac{\psi_-}{\psi_+} \right|^2 = \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \operatorname{Im} \int_C p dx \right). \quad (52,2)$$

После того, как эта формула получена, можно любым образом деформировать путь интегрирования в экспоненте; если превратить его в указанный на рис. 19 путь  $C'$ , то интеграл сведется к удвоенному интегралу по пути от  $x_1$  до  $x_0$  и мы получим

$$R = e^{-4\sigma(x_1, x_0)/\hbar}, \quad \sigma(x_1, x_0) = \operatorname{Im} \int_{x_1}^{x_0} p(x) dx; \quad (52,3)$$

поскольку на всей вещественной оси функция  $p(x)$  вещественна, то выбор  $x_1$  несуществен <sup>2)</sup>. Обратим внимание на то, что предэкспоненциальный коэффициент в (52,3) оказывается равным единице (В. Л. Покровский, С. К. Саввиных, Ф. Р. Улинич, 1958) <sup>3)</sup>.

Как уже указывалось, из всех возможных значений  $x_0$  должно быть выбрано то, для которого показатель в (52,3) имеет наименьшее по абсолютной величине значение, причем это значение должно еще быть достаточно большим по сравнению с единицей.

(Разумеется, должны рассматриваться лишь точки  $x_0$ , для которых  $\sigma > 0$ , т. е. точки, лежащие в верхней полуплоскости.) Подразумевается также, что если сама потенциальная энергия  $U(x)$  имеет особые точки в верхней полуплоскости, то для них интеграл  $\sigma(x_1, x_0)$  имеет большие значения <sup>4)</sup>. В противном случае именно такая точка определит значение показателя, но предэкспоненциальный коэффициент будет уже не тем, что в (52,3). Последнее условие заведомо нарушается при увеличении энергии  $E$ ,

<sup>1)</sup> Обход же по пути, проходящему под точкой  $x_0$  (например, просто вдоль самой вещественной оси), переведет функцию  $\psi_+$  в падающую волну.

<sup>2)</sup> В некоторых случаях интересны не только амплитудные, но и фазовые соотношения между падающей и отраженной волнами. Эти соотношения характеризуются амплитудой отражения, выражающейся через введенные в § 25 коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ . С помощью проведенных выше рассуждений легко показать, в частности, что амплитуда отражения падающей слева волны есть

$$(-\beta^*/\alpha^*) = -i \exp \left[ \frac{2i}{\hbar} \left( \int_{x_1}^{x_0} p dx + p_1 x_1 \right) \right], \quad x_1 \rightarrow -\infty.$$

(Множитель  $(-i)$  связан с изменением фазы предэкспоненциального множителя при обходе точки ветвления, ср. § 47).

<sup>3)</sup> Изложенный вывод этого результата принадлежит Л. Д. Ландау (1961).

<sup>4)</sup> Отметим, что контур  $C$  на рис. 19 должен проходить ниже особых точек функции  $U(x)$ .

если  $U(x)$  обращается в бесконечность где-либо в верхней полуплоскости: наступает момент, когда точка  $x_0$ , в которой  $U = E$ , настолько сближается с точкой  $x_\infty$ , в которой  $U = \infty$ , что обе дают сравнимый вклад в коэффициент отражения (интеграл  $\sigma(x_\infty, x_0) \sim 1$ ) и формула (52,3) становится неприменимой. В предельном случае, когда  $E$  настолько велико, что указанный интеграл мал по сравнению с единицей, становится применимой теория возмущений (см. задачу 2)<sup>1)</sup>.

### Задачи

1. В квазиклассическом приближении с экспоненциальной точностью определить вероятность распада дейтрона при столкновении с тяжелым ядром, рассматриваемым как неподвижный центр кулонова поля (*Е. М. Лифшиц*, 1939).

Решение. Наибольший вклад в вероятность реакции вносят столкновения с нулевым орбитальным моментом. В квазиклассическом приближении это — «лобовые» столкновения, в которых движение частиц сводится к одномерному.

Пусть  $E$  — энергия дейтрона, измеренная в единицах  $e$  — энергии связи протона и нейтрона в нем;  $E_n$  и  $E_p$  — энергии освобожденных нейтрона и протона (в тех же единицах). Введем также безразмерную координату  $q = r/(Ze^2/e)$  ( $Ze$  — заряд ядра), а ее значение (вообще говоря, комплексное) в «точке перехода», т. е. в «момент распада» дейтрона, обозначим через  $q_0$ . Представим  $E_n$ ,  $E_p$ ,  $E$  в виде

$$E_n = \frac{v_n^2}{2}, \quad E_p = \frac{v_p^2}{2} + \frac{1}{q_0}, \quad E = v_d^2 + \frac{1}{q_0}; \quad (1)$$

$v_n$ ,  $v_p$ ,  $v_d$  — «скорости» частиц в момент распада, измеренные в единицах  $\sqrt{e/m}$  ( $m$  — масса нуклона);  $v_n$  вещественна и совпадает со скоростью освобожденного нейтрона, а  $v_p$  и  $v_d$  комплексны. Условия сохранения энергии и импульса в точке перехода дают

$$E_p + E_n = E - 1, \quad v_p + v_n = 2v_d, \quad (2)$$

откуда

$$v_p = 2i + v_n, \quad v_d = i + v_n, \quad \frac{1}{q_0} = E + 1 - v_n^2 + 2iv_n.$$

Действие системы до перехода отвечает движению дейтрона в поле ядра до точки распада; его мнимая часть

$$\begin{aligned} \text{Im } S_1 &= Ze^2 \sqrt{\frac{m}{e}} \text{Im} \int_{\infty}^{q_0} \sqrt{4 \left( E - \frac{1}{q} \right)} dq = \\ &= Ze^2 \sqrt{\frac{m}{e}} \text{Im} \left\{ 2q_0 v_d - \frac{2}{\sqrt{E}} \text{Arch} \sqrt{q_0 E} \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

<sup>1)</sup> Промежуточный случай рассмотрен *В. Л. Покровским* и *И. М. Халатниковым* (ЖЭТФ 40, 1713 (1961)).

После перехода действие отвечает движению нейтрона и протона от гочки распада:

$$\begin{aligned} \text{Im } S_2 &= Ze^2 \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} \text{Im} \left\{ \int_{q_0}^{\infty} v_n dq + \int_{q_0}^{\infty} \sqrt{2 \left( E_p - \frac{1}{q} \right)} dq \right\} = \\ &= Ze^2 \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} \text{Im} \left\{ -v_n q_0 - v_p q_0 + \sqrt{\frac{2}{E_p}} \text{Arch} \sqrt{q_0 E_p} \right\}. \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно (52,1) вероятность процесса

$$\omega \sim \exp \left\{ -\frac{2Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} \text{Im} \left[ \sqrt{\frac{2}{E_p}} \text{Arch} \sqrt{q_0 E_p} - \frac{2}{\sqrt{E}} \text{Arch} \sqrt{q_0 E} \right] \right\}. \quad (5)$$

В соответствии с происхождением первого и второго Arch в квадратных скобках из выражений (4) и (3) знаки их мнимых частей должны совпадать со знаками соответственно  $\text{Im } v_p$  и  $\text{Im } v_d$  (знаки же последних в решении уравнений (2) выбраны так, чтобы в результате получилось  $\text{Im} (S_1 + S_2) > 0$ ).

В виду экспоненциального характера зависимости  $\omega$  от  $E_n$  суммарная вероятность распада (со всеми значениями  $E_n$  и  $E_p = E - 1 - E_n$ ) определяется минимальным (по абсолютной величине) значением показателя экспоненты как функции от  $E_n$ . Анализ показывает, что это значение достигается при  $E_n \rightarrow 0$ . При этом  $q_0 = 1/(E + 1)$  и из (5) находим

$$\begin{aligned} \omega \sim \exp \left\{ -\frac{2Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} \left[ \sqrt{\frac{2}{E-1}} \arccos \sqrt{\frac{E-1}{E+1}} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{\sqrt{E}} \arccos \sqrt{\frac{E}{E+1}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Условие применимости этой формулы состоит в большой (по сравнению с единицей) величине показателя экспоненты.

Вычислив мнимую часть действия  $S = S_1 + S_2$  при отличных от нуля значениях  $E_n$ , можно найти распределение освобождающихся частиц по энергиям. Вблизи значения  $E_n = 0$  имеем <sup>1)</sup>

$$\text{Im } S(E_n) - \text{Im } S(0) \approx E_n \left( \frac{d \text{Im } S}{dE_n} \right)_{E_n=0}.$$

Вычисление производной приводит к результату:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dE_n} \sim \exp \left\{ -\frac{2Ze^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{\varepsilon}} E_n \left[ \frac{3-E}{(E-1)(E+1)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{2(E-1)^3}} \arccos \sqrt{\frac{E-1}{E+1}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

2. Определить коэффициент надбарьерного отражения при таких энергиях частицы, когда применима теория возмущений.

Решение получается по формуле (43,1), в которой начальная и конечная волновые функции — плоские волны, распространяющиеся в противоположных направлениях и нормированные соответственно на единичную плотность

<sup>1)</sup> При  $E_n = 0$  функция  $\text{Im } S(E_n)$  имеет угловую точку, от которой возрастает в обе стороны — положительных и отрицательных  $E_n$  (значения  $E_n < 0$  отвечали бы захвату нейтрона ядром).

потока и на  $\delta$ -функцию импульса, деленного на  $2\pi\hbar$ . При этом  $dv = dp'/2\pi\hbar$ , где  $p'$  — импульс после отражения. Произведя в (43,1) интегрирование по  $dp'$  (с учетом наличия  $\delta$ -функции), получим

$$R = \frac{m^2}{\hbar^2 p^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{2ipx/\hbar} dx \right|^2. \quad (1)$$

Эта формула справедлива, если выполняется условие применимости теории возмущений:  $Ua/\hbar v \ll 1$ , где  $a$  — ширина барьера (см. примечание на стр. 199), и в то же время  $pa/\hbar \lesssim 1$ . Последнее условие обеспечивает неэкспоненциальный характер зависимости  $R(p)$ ; в противном случае вопрос о применимости формулы (1) требует дальнейшего исследования.

3. Определить коэффициент надбарьерного отражения от квазиклассического барьера в случае, когда функция  $U(x)$  при  $x = x_0$  имеет излом.

Решение. Если функция  $U(x)$  имеет какую-либо особенность при вещественном  $x$ , коэффициент отражения определяется в основном полем вблизи этой точки и для его вычисления можно формально применить теорию возмущений, не требуя при этом соблюдения условия ее применимости при всех  $x$ ; достаточно выполнения условия квазиклассичности. Мы приходим тогда к формуле (1) задачи 2 с той лишь разницей, что вместо импульса падающей частицы в ней должно стоять значение функции  $p(x)$  при  $x = x_0$ .

Выбирая в данном случае точку излома в качестве точки  $x = 0$ , имеем вблизи нее:

$$U = -F_1 x \text{ при } x > 0, \quad U = -F_2 x \text{ при } x < 0$$

с различными  $F_1$  и  $F_2$ . Интегрирование по  $dx$  производится путем введения в подынтегральное выражение затухающего множителя  $e^{\pm\lambda x}$  (после чего полагаем  $\lambda \rightarrow 0$ ). В результате найдем

$$R = \frac{m^2 \hbar^2}{16 p_0^6} (F_2 - F_1)^2,$$

где  $p_0 = p(0)$ .

### § 53. Переходы под влиянием адиабатических возмущений

Мы уже упоминали в § 41, что в пределе сколь угодно медленно меняющегося со временем возмущения вероятность перехода системы из одного состояния в другое стремится к нулю. Рассмотрим теперь этот вопрос количественно, вычислив вероятность перехода под влиянием медленно меняющегося (адиабатического) возмущения (Л. Д. Ландау, 1961).

Пусть гамильтониан системы есть медленно меняющаяся функция времени, стремящаяся к определенным пределам при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Пусть, далее,  $\psi_n(q, t)$  и  $E_n(t)$  — собственные функции и собственные значения энергии (зависящие от времени, как от параметра), получающиеся в результате решения уравнения Шредингера  $\hat{H}(t)\psi_n = E_n\psi_n$ ; ввиду адиабатического характера временного изменения  $\hat{H}$  зависимости  $E_n$  и  $\psi_n$  от времени также являются медленными. Стоящая перед нами задача состоит в определении вероятности  $w_{21}$  нахождения системы при  $t \rightarrow +\infty$  в некотором состоянии  $\psi_2$ , если при  $t \rightarrow -\infty$  она находилась в состоянии  $\psi_1$ .