частицы с целым спином возвращаются к своему первоначальному значению, а волновые функции частиц с полуцелым спином меняют свой знак.

Задачи

1. Свести произвольную функцию линейного по матрицам Паули скаляра $a+\mathbf{b}\hat{\sigma}$ к линейной функции.

Решение. Для определения коэффициентов в искомой формуле

$$f(a+\mathbf{b}\hat{\sigma}) = A + \mathbf{B}\hat{\sigma}$$

замечаем, что при выборе оси z вдоль направления $\mathbf{b}$ собственные значения оператора $a+\mathbf{b}\hat{\sigma}$ равны $a \pm b$, а соответствующие собственные значения оператора $f(a+\mathbf{b}\hat{\sigma})$ равны $f(a \pm b)$. Отсюда находим

$$A = \frac{1}{2}[f(a+b)+f(a-b)], \quad \mathbf{B} = \frac{\mathbf{b}}{2b}[f(a+b)-f(a-b)].$$

2. Определить значения скалярного произведения $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ спинов (1/2) двух частиц в состояниях, в которых суммарный спин системы $\mathbf{S}=\mathbf{s}_1+\mathbf{s}_2$ имеет определенные значения (0 или 1).

Решение. По общей формуле (31,3), справедливой при сложении любых двух моментов, найдем

$$\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 = 1/4 \quad \text{при} \quad S=1, \qquad \mathbf{s}_1\mathbf{s}_2 = -3/4 \quad \text{при} \quad S=0.$$

3. Какие степени оператора $\hat{\mathbf{s}}$ произвольного спина s являются независимыми?

Решение. Оператор

$$(\hat{s}_z - s)(\hat{s}_z - s + 1)\ \ldots\ (\hat{s}_z + s),$$

составленный из разностей $\hat{s}_z$ и всех возможных собственных значений s_z, дает нуль при воздействии на любую волновую функцию, а потому сам равен нулю. Отсюда следует, что $(\hat{s}_z)^{2s+1}$ выражается через более низкие степени оператора $\hat{s}_z$, так что независимыми являются лишь его степени от 1 до $2s$.

§ 56. Спиноры

При равном нулю спине волновая функция имеет всего одну компоненту: $\psi(0)$. При воздействии оператора спина она обращается в нуль: $\hat{\mathbf{s}}\psi = 0$. Ввиду связи $\hat{\mathbf{s}}$ с оператором бесконечно малых поворотов, это значит, что волновая функция частицы с нулевым спином не меняется при поворотах системы координат, т. е. является скаляром.

Волновая функция частицы со спином 1/2 имеет две компоненты: $\psi(1/2)$ и $\psi(-1/2)$. Для удобства дальнейших обобщений будем отличать эти компоненты соответственно индексами 1 и 2, написанными у буквы сверху; двухкомпонентную величину

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi^1\\ \psi^2\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\psi(1/2)\\ \psi(-1/2)\end{pmatrix} \qquad (56,1)$$

называют *спинором*.

При произвольном повороте системы координат компоненты спинора подвергаются линейному преобразованию

$$\psi^{1'} = a\psi^1 + b\psi^2, \quad \psi^{2'} = c\psi^1 + d\psi^2. \tag{56,2}$$

Его можно записать в виде

$$\psi^{\lambda'} = (\hat{U}\psi)^\lambda, \ \hat{U} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{56,3}$$

где $\hat{U}$ — матрица преобразования [1]). Элементы этой матрицы, вообще говоря, комплексны и являются функциями углов поворота осей координат. Они связаны друг с другом соотношениями, непосредственно следующими из физических требований, предъявляемых к спинору, как к волновой функции частицы.

Рассмотрим билинейную форму

$$\psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1, \tag{56,4}$$

где ψ и φ — два спинора. Простое вычисление дает

$$\psi^{1'}\varphi^{2'} - \psi^{2'}\varphi^{1'} = (ad - bc)(\psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1),$$

т. е. величина (56,4) при повороте системы координат преобразуется сама через себя. Но если имеется всего одна преобразующаяся сама через себя функция, то она может рассматриваться как соответствующая спину нуль и, следовательно, должна быть скаляром, т. е. должна вообще оставаться неизменной при поворотах системы координат. Отсюда получаем равенство

$$ad - bc = 1; \tag{56,5}$$

определитель матрицы преобразования равен единице [2]).

Дальнейшие соотношения возникают из требования, чтобы было скаляром выражение

$$\psi^1\psi^{1*} + \psi^2\psi^{2*}, \tag{56,6}$$

определяющее вероятность нахождения частицы в данной точке пространства. Преобразование, оставляющее инвариантной сумму квадратов модулей преобразуемых величин, есть унитарное преобразование, т. е. должно быть $\hat{U}^+ = \hat{U}^{-1}$ (см. § 12). При условии (56,5) обратная матрица

$$\hat{U}^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

---

[1]) Запись $\hat{U}\psi$ предполагает перемножение строк матрицы $\hat{U}$ со столбцом ψ.

[2]) Такое преобразование двух величин называют *бинарным*.

Приравняв ее сопряженной матрице

$$\hat{U}^{+} = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix},$$

найдем соотношения

$$a = d^*, \quad b = -c^*. \tag{56,7}$$

В силу соотношений (56,5) и (56,7) четыре комплексные величины a, b, c, d содержат в действительности всего три независимых вещественных параметра, что соответствует трем углам, определяющим поворот трехмерной системы координат.

Сравнив выражения скаляров (56,4) и (56,6), мы видим, что величины ψ^{1*}, ψ^{2*} должны преобразовываться как ψ^2, $-\psi^1$; легко проверить, что в силу соотношений (56,5) и (56,7) это действительно так [1]).

Алгебре спиноров можно придать форму, аналогичную тензорной алгебре. Это достигается введением, наряду с *контравариантными* компонентами спинора ψ^1, ψ^2 (индексы сверху), также и *ковариантных* компонент (индексы снизу) согласно определению

$$\psi_1 = \psi^2, \quad \psi_2 = -\psi^1. \tag{56,8}$$

Инвариантная комбинация двух спиноров (56,4) запишется тогда в виде скалярного произведения

$$\psi^\lambda\varphi_\lambda = \psi^1\varphi_1 + \psi^2\varphi_2 = \psi^1\varphi^2 - \psi^2\varphi^1; \tag{56,9}$$

здесь и ниже по дважды повторяющимся (немым) индексам подразумевается суммирование подобно тому, как это принято в тензорной алгебре. Заметим следующее правило, которое надо иметь в виду в спинорной алгебре. Имеем $\psi^\lambda\varphi_\lambda = \psi^1\varphi_1 + \psi^2\varphi_2 = -\psi_2\varphi^2 - \psi_1\varphi^1$, т. е.

$$\psi^\lambda\varphi_\lambda = -\psi_\lambda\varphi^\lambda. \tag{56,10}$$

Отсюда очевидно, что скалярное произведение всякого спинора самого на себя равно нулю:

$$\psi^\lambda\psi_\lambda = 0. \tag{56,11}$$

Согласно сказанному выше величины ψ_1, ψ_2 преобразуются как ψ^{1*}, ψ^{2*}, т. е.

$$\psi'_\lambda = (\hat{U}^*\psi)_\lambda. \tag{56,12}$$

---

[1]) Это свойство тесно связано с симметрией по отношению к обращению времени. Последнему соответствует (см. § 18) замена волновой функции на ее комплексно сопряженную. Но при обращении времени меняют знак также и проекции момента. Поэтому функции, комплексно сопряженные компонентам $\psi^1 \equiv \psi(1/2)$ и $\psi^2 \equiv \psi(-1/2)$, по своим свойствам должны быть эквивалентны компонентам, отвечающим соответственно проекциям спина $-1/2$ и $1/2$.

Произведение $\hat{U}^*\psi$ можно написать также и в виде $\psi\tilde{\hat{U}}^*$ с транспонированной матрицей $\tilde{\hat{U}}^*$. Ввиду унитарности матрицы $\hat{U}$ имеем $\tilde{\hat{U}}^* = \hat{U}^{-1}$, так что $\psi'_\lambda = (\psi\hat{U}^{-1})_\lambda$ или [1])

$$\psi_\lambda = (\psi'\hat{U})_\lambda. \tag{56,13}$$

Подобно переходу от векторов к тензорам в обычной тензорной алгебре, можно ввести понятие о *спинорах высших рангов*. Так, спинором второго ранга назовем четырехкомпонентную величину $\psi^{\lambda\mu}$, компоненты которой преобразуются как произведения $\psi^\lambda\varphi^\mu$ компонент двух спиноров (спиноров первого ранга). Наряду с контравариантными компонентами $\psi^{\lambda\mu}$ можно рассматривать ковариантные $\psi_{\lambda\mu}$ и смешанные $\psi_\lambda{}^\mu$ компоненты, преобразующиеся соответственно как $\psi_\lambda\varphi_\mu$ и $\psi_\lambda\varphi^\mu$. Аналогичным образом определяются спиноры любого ранга.

Переход от контра- к ковариантным компонентам спиноров и обратно можно представить в виде

$$\psi_\lambda = g_{\lambda\mu}\psi^\mu, \quad \psi^\lambda = g^{\mu\lambda}\psi_\mu, \tag{56,14}$$

где

$$(g_{\lambda\mu}) = (g^{\lambda\mu}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{56,15}$$

— *метрический спинор* в векторном пространстве двух измерений[2]). Таким же образом имеем, например,

$$\psi_\lambda{}^\mu = g_{\lambda\nu}\psi^{\nu\mu}, \quad \psi_{\lambda\mu} = g_{\lambda\nu}g_{\mu\rho}\psi^{\nu\rho},$$

так что $\psi_{12} = -\psi_1{}^1 = -\psi^{21}$, $\psi_{11} = \psi_1{}^2 = \psi^{22}$ и т. п.

Сами $g_{\lambda\mu}$ составляют антисимметричный единичный спинор второго ранга. Легко убедиться в том, что при преобразованиях координат его компоненты остаются неизменными и что

$$g_{\lambda\nu}g^{\mu\nu} = \delta_\lambda^\mu, \tag{56,16}$$

где $\delta_1^1 = \delta_2^2 = 1$, $\delta_2^1 = \delta_1^2 = 0$.

Как и в обычной тензорной алгебре, в спинорной алгебре имеются две основные операции — умножение и упрощение (или свертывание) по паре индексов. Умножение двух спиноров дает спинор более высокого ранга; так, из двух спиноров второго и третьего рангов $\psi_{\lambda\mu}$ и $\psi^{\nu\rho\sigma}$ можно образовать спинор пятого ранга $\psi_{\lambda\mu}\psi^{\nu\rho\sigma}$. Упрощение по паре индексов (т. е. суммирование

---

[1]) Запись вида $\psi\hat{U}$ (ψ слева от $\hat{U}$) означает перемножение расположенных в строку компонент (ψ_1, ψ_2) со столбцами матрицы $\hat{U}$.

[2]) Заметим, что матрица (56,15) совпадает с $i\hat{\sigma}_y$.

компонент по одинаковым значениям одного ко- и одного контравариантного индексов) понижает ранг спинора на две единицы. Так, упрощение спинора $\psi_{\lambda\mu}{}^{\nu\rho\sigma}$ по индексам μ и ν дает спинор третьего ранга $\psi_{\lambda\mu}{}^{\mu\rho\sigma}$; упрощение спинора $\psi_{\lambda}{}^{\mu}$ дает скаляр $\psi_{\lambda}{}^{\lambda}$. При этом имеет место правило, аналогичное выражаемому формулой (56,10): если переменить положения (верхнее и нижнее) индексов, по которым производится упрощение, то изменится знак величины (т. е. $\psi_{\lambda}{}^{\lambda} = -\psi^{\lambda}{}_{\lambda}$). Отсюда, в частности, следует, что если спинор симметричен по каким-либо двум своим индексам, то в результате упрощения по этим индексам получим нуль. Так, для симметричного спинора второго ранга $\psi_{\lambda\mu}$ имеем $\psi_{\lambda}{}^{\lambda} = 0$.

Симметричным спинором n-го ранга назовем спинор, симметричный по всем своим индексам. Из асимметричного спинора можно составить симметричный спинор путем симметризации — суммированием компонент, получающихся при всех возможных перестановках индексов. В силу сказанного выше из компонент симметричного спинора невозможно составить (путем упрощения) спинор более низкого ранга.

Что касается антисимметричного (по всем своим индексам) спинора, то таковым может быть только спинор второго ранга. Действительно, поскольку каждый индекс может пробегать всего два значения, то при трех или большем числе индексов по крайней мере два индекса будут иметь одинаковые значения, а потому компоненты спинора тождественно обратятся в нуль. Всякий антисимметричный спинор второго ранга сводится к скаляру, умноженному на единичный спинор $g_{\lambda\mu}$. Отметим здесь следующее, вытекающее из сказанного, соотношение:

$$g_{\lambda\mu}\psi_{\nu} + g_{\mu\nu}\psi_{\lambda} + g_{\nu\lambda}\psi_{\mu} = 0, \qquad (56,17)$$

где ψ_{λ} — произвольный спинор; это правило является следствием просто того, что стоящее в левой части равенства выражение представляет собой (как легко проверить) антисимметричный спинор третьего ранга.

Спинор, составленный как произведение спинора $\psi_{\lambda\mu}$ на самого себя, упрощенный по одной паре индексов, антисимметричен по другой; действительно,

$$\psi_{\lambda\nu}\psi_{\mu}{}^{\nu} = -\psi_{\lambda}{}^{\nu}\psi_{\mu\nu}.$$

Поэтому в силу сказанного выше этот спинор должен сводиться к спинору $g_{\lambda\mu}$, умноженному на скаляр. Определяя последний так, чтобы упрощение по второй паре индексов давало правильный результат, найдем

$$\psi_{\lambda\nu}\psi_{\mu}{}^{\nu} = -\frac{1}{2}\psi_{\rho\sigma}\psi^{\rho\sigma}g_{\lambda\mu}. \qquad (56,18)$$

Компоненты спинора $\psi^*_{\lambda\mu\ldots}$, комплексно сопряженного с $\psi_{\lambda\mu\ldots}$, преобразуются как компоненты контравариантного спинора $\varphi^{\lambda\mu\ldots}$, и наоборот. Сумма квадратов модулей компонент любого спинора является, следовательно, инвариантом.

§ 57. Волновые функции частиц с произвольным спином

Развив формальную алгебру спиноров произвольного ранга, мы можем перейти к нашей непосредственной задаче — изучению свойств волновых функций частиц с произвольным спином.

К этому вопросу удобно подойти, рассматривая совокупность n частиц со спином 1/2. Максимальное возможное значение z-компоненты полного спина системы равно $n/2$, что получается, когда для каждой из частиц $s_z = 1/2$ (все спины направлены в одну сторону — вдоль оси z). В этом случае можно утверждать, что и полный спин S системы равен $n/2$.

Все компоненты волновой функции $\psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ системы частиц равны при этом нулю, за исключением только одной — $\psi(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$. Если написать волновую функцию в виде произведения n спиноров $\psi^\lambda\varphi^\mu\ldots$, из которых каждый относится к одной из частиц, то у каждого из них будет отлична от нуля только компонента с $\lambda, \mu, \ldots = 1$. Таким образом, будет отличным от нуля только произведение $\psi^1\varphi^1\ldots$ Но совокупность всех этих произведений представляет собой некоторый спинор n-го ранга, симметричный по всем своим индексам. Если произвести преобразование системы координат (так, что спины окажутся направленными не по оси z), то мы получим некоторый спинор n-го ранга общего вида, но по-прежнему симметричный.

Спиновые свойства волновых функций, будучи по существу их свойствами по отношению к поворотам системы координат, тождественны для частицы со спином s и для системы из $n = 2s$ частиц со спинами 1/2, направленными так, что полный спин системы равен s. Отсюда заключаем, что волновая функция частицы со спином s представляет собой симметричный спинор ранга $n = 2s$.

Легко видеть, что число независимых компонент симметричного спинора $2s$-го ранга равно, как и должно было быть, тоже $2s + 1$. Действительно, различными будут лишь компоненты, среди индексов которых имеется $2s$ единиц и 0 двоек, $2s - 1$ единиц и одна двойка и т. д. до 0 единиц и $2s$ двоек.

С математической точки зрения, симметричные спиноры дают классификацию возможных типов преобразования величин при поворотах системы координат. Если имеется $2s + 1$ различных величин, линейно преобразующихся друг через друга (причем число этих величин не может быть уменьшено никаким выбором из линейных комбинаций), то можно утверждать, что закон их