Компоненты спинора $\psi^*_{\lambda\mu\ldots}$, комплексно сопряженного с $\psi_{\lambda\mu\ldots}$, преобразуются как компоненты контравариантного спинора $\varphi^{\lambda\mu\ldots}$, и наоборот. Сумма квадратов модулей компонент любого спинора является, следовательно, инвариантом.

§ 57. Волновые функции частиц с произвольным спином

Развив формальную алгебру спиноров произвольного ранга, мы можем перейти к нашей непосредственной задаче — изучению свойств волновых функций частиц с произвольным спином.

К этому вопросу удобно подойти, рассматривая совокупность n частиц со спином 1/2. Максимальное возможное значение z-компоненты полного спина системы равно $n/2$, что получается, когда для каждой из частиц $s_z = 1/2$ (все спины направлены в одну сторону — вдоль оси z). В этом случае можно утверждать, что и полный спин S системы равен $n/2$.

Все компоненты волновой функции $\psi(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ системы частиц равны при этом нулю, за исключением только одной — $\psi(1/2, 1/2, \ldots, 1/2)$. Если написать волновую функцию в виде произведения n спиноров $\psi^\lambda\varphi^\mu\ldots$, из которых каждый относится к одной из частиц, то у каждого из них будет отлична от нуля только компонента с $\lambda, \mu, \ldots = 1$. Таким образом, будет отличным от нуля только произведение $\psi^1\varphi^1\ldots$ Но совокупность всех этих произведений представляет собой некоторый спинор n-го ранга, симметричный по всем своим индексам. Если произвести преобразование системы координат (так, что спины окажутся направленными не по оси z), то мы получим некоторый спинор n-го ранга общего вида, но по-прежнему симметричный.

Спиновые свойства волновых функций, будучи по существу их свойствами по отношению к поворотам системы координат, тождественны для частицы со спином s и для системы из $n = 2s$ частиц со спинами 1/2, направленными так, что полный спин системы равен s. Отсюда заключаем, что волновая функция частицы со спином s представляет собой симметричный спинор ранга $n = 2s$.

Легко видеть, что число независимых компонент симметричного спинора $2s$-го ранга равно, как и должно было быть, тоже $2s + 1$. Действительно, различными будут лишь компоненты, среди индексов которых имеется $2s$ единиц и 0 двоек, $2s - 1$ единиц и одна двойка и т. д. до 0 единиц и $2s$ двоек.

С математической точки зрения, симметричные спиноры дают классификацию возможных типов преобразования величин при поворотах системы координат. Если имеется $2s + 1$ различных величин, линейно преобразующихся друг через друга (причем число этих величин не может быть уменьшено никаким выбором из линейных комбинаций), то можно утверждать, что закон их

преобразования эквивалентен закону преобразования компонент симметричного спинора ранга $2s$. Всякая совокупность любого числа функций, линейно преобразующихся друг через друга при поворотах системы координат, может быть сведена (надлежащим линейным преобразованием) к одному или нескольким симметричным спинорам [1]).

Так, произвольный спинор n-го ранга $\psi_{\lambda\mu\nu\ldots}$ может быть сведен к симметричным спинорам рангов n, $n-2$, $n-4$, ... Фактически такое приведение может быть произведено следующим образом. Симметризуя спинор $\psi_{\lambda\mu\nu\ldots}$ по всем индексам, образуем симметричный спинор того же n-го ранга. Далее, упрощая исходный спинор $\psi_{\lambda\mu\nu\ldots}$ по различным парам индексов, получим спиноры $(n-2)$-го ранга вида $\psi^{\lambda}{}_{\lambda\nu\ldots}$, которые в свою очередь симметризуем, так что получаем симметричные спиноры $(n-2)$-го ранга. Симметризуя спиноры, получающиеся после упрощения $\psi_{\lambda\mu\ldots}$, по двум парам индексов, получим симметричные спиноры $(n-4)$-го ранга, и т. д.

Нам остается еще установить связь между компонентами симметричного спинора $2s$-го ранга и $2s+1$ функциями $\psi(\sigma)$ (где $\sigma = s, s-1, \ldots, -s$). Компонента

$$\psi^{\underbrace{11\ldots1}_{s+\sigma}\overbrace{22\ldots2}^{s-\sigma}},$$

среди индексов которой 1 повторяется $s+\sigma$ раз, а 2 встречается $(s-\sigma)$ раз, соответствует равной σ проекции спина на ось z. Действительно, если опять рассматривать систему $n = 2s$ частиц со спином $1/2$ вместо одной частицы со спином s, то написанной компоненте будет соответствовать произведение

$$\overbrace{\psi^1\varphi^1\ldots}^{s+\sigma}\ \overbrace{\chi^2\rho^2\ldots}^{s-\sigma};$$

такое произведение отвечает состоянию, в котором $(s+\sigma)$ частиц имеют проекцию спина, равную $+1/2$ и $(s-\sigma)$ — проекцию, равную $-1/2$, так что суммарная проекция равна $^1/_2\,(s+\sigma) - {}^1/_2\,(s-\sigma) = \sigma$. Наконец, коэффициент пропорциональности между написанной компонентой спинора и $\psi(\sigma)$ подберем так, чтобы имело место равенство

$$\sum_{\sigma=-s}^{+s} |\psi(\sigma)|^2 = \sum_{\lambda,\,\mu,\,\ldots=1}^{2} |\psi^{\lambda\mu\ldots}|^2 \qquad (57,1)$$

---

[1]) Другими словами, симметричные спиноры осуществляют неприводимые представления группы вращений (см. § 98).

(эта сумма является скаляром, как и должно быть, поскольку она определяет вероятность нахождения частицы в данной точке пространства). В сумме в правой стороне равенства компоненты с $(s+\sigma)$ индексами 1 встречаются

$$\frac{(2s)!}{(s+\sigma)!\,(s-\sigma)!}$$

раз. Поэтому ясно, что соответствие между функциями $\psi(\sigma)$ и компонентами спинора устанавливается формулой

$$\psi(\sigma)=\sqrt{\frac{(2s)!}{(s+\sigma)!\,(s-\sigma)!}}\,\psi^{\underbrace{11\ldots1}_{s+\sigma}\overbrace{22\ldots2}^{s-\sigma}}. \tag{57,2}$$

Соотношением (57,2) обеспечивается соблюдение не только условия (57,1), но, как легко убедиться, также и более общего условия

$$\psi^{\lambda\mu\ldots}\varphi_{\lambda\mu\ldots}=\sum_{\sigma}(-1)^{s-\sigma}\,\psi(\sigma)\,\varphi(-\sigma), \tag{57,3}$$

где $\psi^{\lambda\mu\ldots}$ и $\varphi_{\lambda\mu\ldots}$ — два различных спинора одинакового ранга, а $\psi(\sigma)$, $\varphi(\sigma)$ — функции, сопоставляемые с этими спинорами по формуле (57,2) (множитель $(-1)^{s-\sigma}$ связан с тем, что при поднимании всех индексов у компонент спинора знак меняется столько раз, сколько имеется двоек среди индексов).

Формулами (55,5) определяется результат воздействия оператора спина на волновые функции $\psi(\sigma)$. Не представляет труда установить, каким образом воздействуют эти операторы на волновую функцию, написанную в виде спинора $2s$-го ранга. В случае спина 1/2 функции $\psi(+1/2)$, $\psi(-1/2)$ совпадают с компонентами ψ^1, ψ^2 спинора. Согласно (55,6) и (55,7) результатом воздействия на них операторов спина будет

$$\begin{aligned}&(\hat{s}_x\psi)^1=\frac{1}{2}\psi^2, \quad (\hat{s}_y\psi)^1=-\frac{i}{2}\psi^2, \quad (\hat{s}_z\psi)^1=\frac{1}{2}\psi^1,\\ &(\hat{s}_x\psi)^2=\frac{1}{2}\psi^1, \quad (\hat{s}_y\psi)^2=\frac{i}{2}\psi^1, \quad (\hat{s}_z\psi)^2=-\frac{1}{2}\psi^2.\end{aligned} \tag{57,4}$$

Для перехода к общему случаю произвольного спина снова рассматриваем систему из $2s$ частиц со спином 1/2 и пишем ее волновую функцию в виде произведения $2s$ спиноров. Оператор спина системы частиц представляет собой сумму операторов спинов каждой из частиц, действующих только на соответствующий спинор, причем результат их воздействия определяется формулами (57,4). Переходя затем обратно к произвольным симметрич-

ным спинорам, т. е. к волновым функциям частицы со спином s, получим следующие формулы:

$$(\hat{s}_x\psi)^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma}} = \frac{s+\sigma}{2}\psi^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma-1}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma+1}} + \frac{s-\sigma}{2}\psi^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma+1}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma-1}},$$

$$(\hat{s}_y\psi)^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma}} = -i\frac{s+\sigma}{2}\psi^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma-1}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma+1}} + i\frac{s-\sigma}{2}\psi^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma+1}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma-1}},$$

$$(\hat{s}_z\psi)^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma}} = \sigma\psi^{\overbrace{11\ldots}^{s+\sigma}\overbrace{22\ldots}^{s-\sigma}}. \tag{57,5}$$

До сих пор мы говорили о спинорах как о волновых функциях собственного момента элементарных частиц. Однако с формальной точки зрения нет никакой разницы между спином отдельной частицы и полным моментом любой системы, рассматриваемой как целое, отвлекаясь от ее внутренней структуры. Поэтому очевидно, что трансформационные свойства спиноров в той же степени относятся и к поведению по отношению к пространственным поворотам волновых функций ψ_{jm} любой частицы (или системы частиц) с полным моментом j вне зависимости от его природы (орбитальной или спиновой). Должно поэтому существовать определенное соответствие между законами преобразования собственных функций ψ_{jm} при поворотах системы координат и законами преобразования компонент симметричного спинора ранга $2j$.

При установлении этого соответствия необходимо, однако, четко различать два аспекта зависимости волновых функций от проекции момента m (при заданном значении j). Речь может идти о волновой функции, как об амплитуде вероятности для различных значений m, и речь может идти о собственной функции для заданного значения m.

С этими двумя аспектами мы имели уже дело в начале § 55, где рассматривалась собственная функция $\delta_{\sigma\sigma_0}$ оператора $\hat{s}_z$, соответствующая значению $s_z = \sigma_0$. Математическое отличие между ними в особенности ясно видно на примере частицы со спином $s = 1/2$. В этом случае спиновая функция есть, по отношению к переменной σ, контравариантный спинор 1-го ранга, т. е. должна быть написана, в соответствии со спинорными обозначениями, как $\delta^{\sigma}_{\sigma_0}$. По отношению к σ_0 она является, следовательно, ковариантным спинором.

Это обстоятельство имеет, очевидно, общий характер: собственные функции ψ_{jm} могут быть приведены в соответствие с компо-

нентами ковариантного симметричного спинора ранга $2j$ по формулам, аналогичным (57,2) [1]):

$$\psi_{jm} = \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!\,(j-m)!}}\,\psi_{\underbrace{11\ldots}_{j+m}\underbrace{22\ldots}_{j-m}}. \qquad (57,6)$$

Собственными функциями целочисленного момента j являются шаровые функции Y_{jm}. В особенности важен случай $j = 1$. Три шаровые функции Y_{1m}:

$$Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,n_z,$$

$$Y_{1,\pm1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\cdot e^{\pm i\varphi} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(n_x \pm i n_y)$$

($\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора). Видно, что по своим трансформационным свойствам эти три функции эквивалентны компонентам некоторого вектора $\mathbf{a}$ по формулам соответствия, которые запишем в виде

$$\psi_{10} = ia_z,\ \psi_{11} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y),\ \psi_{1,-1} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y). \qquad (57,7)$$

Сравнение этих выражений с формулой (57,6) показывает, что компонентам симметричного спинора второго ранга можно привести в соответствие компоненты некоторого вектора по формулам

$$\psi_{12} = \frac{i}{\sqrt{2}}a_z,\ \psi_{11} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y),\ \psi_{22} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \qquad (57,8)$$

$$\psi^{12} = -\frac{i}{\sqrt{2}}a_z,\ \psi^{11} = \frac{i}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y),\ \psi^{22} = -\frac{i}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y). \qquad (57,9)$$

Обратно:

$$a_z = i\sqrt{2}\,\psi^{12},\ a_x = \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi^{22} - \psi^{11}),\ a_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{11} + \psi^{22}). \qquad (57,10)$$

Легко проверить, что при таком определении имеет место равенство

$$\psi_{\lambda\mu}\varphi^{\lambda\mu} = \mathbf{ab}, \qquad (57,11)$$

---

[1]) К этому результату можно подойти также и несколько иным путем. Если разложить волновую функцию ψ частицы в состоянии с моментом j по собственным функциям ψ_{jm} : $\psi = \sum_m a_m\psi_{jm}$, то коэффициенты a_m представляют собой амплитуды вероятности для различных значений m. В этом смысле они соответствуют «компонентам» ψ (m) спиновой волновой функции, чем устанавливается закон их преобразования. С другой стороны, значение ψ в данной точке пространства не может зависеть от выбора системы координат, т. е. сумма $\sum a_m\psi_{jm}$ должна быть скаляром. Сравнивая со скаляром (57,3), мы видим, что a_m должны преобразовываться как $(-1)^{j-m}\psi_{j,-m}$.

где **a** и **b** — векторы, соответствующие симметричным спинорам $\psi^{\lambda\mu}$ и $\varphi^{\lambda\mu}$. Нетрудно также убедиться в соответствии между спинором и вектором [1])

$$\psi^{\lambda}_{\nu}\varphi^{\mu\nu} + \psi^{\mu}_{\nu}\varphi^{\lambda\nu} \text{ и } \sqrt{2}\,[\mathbf{ab}]. \tag{57,12}$$

Формулы (57,10) можно записать в компактном виде с помощью матриц Паули

$$\mathbf{a} = \frac{i}{\sqrt{2}}\,\sigma^{\lambda}{}_{\mu}\psi^{\mu}_{\lambda}, \quad \psi^{\mu}_{\lambda} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\,\mathbf{a}\sigma^{\mu}_{\lambda} \tag{57,13}$$

(матричные индексы у $\hat{\sigma}$ написаны сверху и снизу в соответствии с расположением спинорных индексов у ψ^{μ}_{λ}). Происхождение этой формулы легко понять, если рассмотреть частный случай, когда спинор второго ранга ψ^{μ}_{λ} сводится к произведению некоторого спинора первого ранга ψ^{μ} и его комплексно сопряженного $\psi^{\lambda *}$; тогда величина

$$\frac{1}{2}\,\psi^{\lambda *}\sigma^{\mu}{}_{\lambda}\psi^{\mu}$$

есть среднее значение спина (для частицы с волновой функцией ψ^{μ}), так что ее векторный характер очевиден.

Соответствие (57,8) или (57,9) является частным случаем общего правила: всякому симметричному спинору четного ранга $2j$ (где j — целое) можно привести в соответствие симметричный тензор вдвое меньше ранга (j), дающий нуль при упрощении по любой паре индексов (такой тензор будем называть *неприводимым*). Это следует уже из того, что число независимых компонент у таких спинора и тензора одинаково (равно $2j + 1$), в чем легко убедиться простым подсчетом [2]). Соответствие между компонентами спинора и тензора может быть найдено с помощью формул (57,8)—(57,10), если рассматривать спинор данного ранга как произведение нескольких спиноров второго ранга, а тензор — как произведение векторов.

Задачи

1. Переписать определение (57,4) оператора спина 1/2 с помощью спинорных компонент вектора $\hat{\mathbf{s}}$.

---

[1]) Смешанные компоненты симметричного спинора можно писать в виде ψ^{λ}_{μ}, не различая $\psi^{\lambda}{}_{\mu}$ и $\psi_{\mu}{}^{\lambda}$.

[2]) Другими словами, $2j + 1$ (j — целое) компонент неприводимого тензора ранга j, как и совокупность $2j + 1$ шаровых функций Y_{jm}, как и $2j + 1$ компонент симметричного спинора ранга $2j$, осуществляют одно и то же неприводимое представление группы вращений.

Решение. С учетом формул (57,9), устанавливающих связь между вектором $\hat{\mathbf{s}}$ и спинором $\hat{s}^{\lambda\mu}$, определение (57,4) записывается в виде

$$\hat{s}^{\lambda\mu}\psi^{\nu} = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\psi^{\lambda}g^{\mu\nu} + \psi^{\mu}g^{\lambda\nu}).$$

2. Написать формулы, определяющие действие оператора спина на векторную волновую функцию частицы со спином 1.

Решение. Связь компонент векторной функции $\boldsymbol{\psi}$ с компонентами спинора $\psi^{\lambda\mu}$ дается формулами (57,9), а последняя из формул (57,5) дает

$$\hat{s}_z\psi_+ = -\psi_+, \quad \hat{s}_z\psi_- = \psi_-, \quad \hat{s}_z\psi_z = 0,$$

(где $\psi_\pm = \psi_x \pm i\psi_y$) или

$$\hat{s}_z\psi_x = -i\psi_y, \quad \hat{s}_z\psi_y = i\psi_x, \quad \hat{s}_z\psi_z = 0.$$

Остальные формулы получаются из этих циклической перестановкой индексов x, y, z. Все вместе они могут быть написаны в виде

$$\hat{s}_i\psi_k = -ie_{ikl}\psi_l.$$

Комплексный вектор $\boldsymbol{\psi}$ может быть представлен в виде $\boldsymbol{\psi} = e^{i\alpha}(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — вещественные векторы, которые путем надлежащего выбора общей фазы α могут быть определены как взаимно перпендикулярные. Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ определяют плоскость, обладающую тем свойством, что проекция спина на перпендикулярное к ней направление может принимать лишь значения ± 1.

§ 58. Оператор конечных вращений

Вернемся к вопросу о преобразовании спиноров и покажем, каким образом коэффициенты этого преобразования могут быть фактически выражены через углы поворота координатных осей.

По определению оператора момента (в данном случае спина), выражение $1 + i\delta\varphi\cdot\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}}$ есть оператор поворота на угол $\delta\varphi$ вокруг направления, задаваемого единичным вектором $\mathbf{n}$; в применении к волновой функции частицы со спином 1/2, т. е. к спинору первого ранга, надо положить в этом операторе $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$. Оператор же поворота на конечный угол φ вокруг того же направления будет соответственно даваться формулой

$$\hat{U}_{\mathbf{n}} = \exp(i\varphi\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}}/2) \tag{58,1}$$

(ср. (15,13)). Как и всякая функция матриц Паули (см. задачу 1 § 55), это выражение сводится к линейному по этим матрицам выражению

$$\hat{U}_{\mathbf{n}} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{58,2}$$

Так, для поворота вокруг оси z находим

$$\hat{U}_z(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\hat{\sigma}_z\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}. \tag{58,3}$$