Решение. С учетом формул (57,9), устанавливающих связь между вектором $\hat{s}$ и спинором $\hat{s}^{\lambda\mu}$, определение (57,4) записывается в виде

$$\hat{s}^{\lambda\mu}\psi^{\nu} = \frac{i}{2\sqrt{2}}(\psi^{\lambda}g^{\mu\nu} + \psi^{\mu}g^{\lambda\nu}).$$

2. Написать формулы, определяющие действие оператора спина на векторную волновую функцию частицы со спином 1.

Решение. Связь компонент векторной функции ψ с компонентами спинора $\psi^{\lambda\mu}$ дается формулами (57,9), а последняя из формул (57,5) дает

$$\hat{s}_z\psi_+ = -\psi_+,\quad \hat{s}_z\psi_- = \psi_-,\quad \hat{s}_z\psi_z = 0,$$

(где $\psi_\pm = \psi_x \pm i\psi_y$) или

$$\hat{s}_z\psi_x = -i\psi_y,\quad \hat{s}_z\psi_y = i\psi_x,\quad \hat{s}_z\psi_z = 0.$$

Остальные формулы получаются из этих циклической перестановкой индексов x, y, z. Все вместе они могут быть написаны в виде

$$\hat{s}_i\psi_k = -ie_{ikl}\psi_l.$$

Комплексный вектор ψ может быть представлен в виде $\psi = e^{i\alpha}(\mathbf{u} + i\mathbf{v})$, где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — вещественные векторы, которые путем надлежащего выбора общей фазы α могут быть определены как взаимно перпендикулярные. Два вектора $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ определяют плоскость, обладающую тем свойством, что проекция спина на перпендикулярное к ней направление может принимать лишь значения ± 1.

§ 58. Оператор конечных вращений

Вернемся к вопросу о преобразовании спиноров и покажем, каким образом коэффициенты этого преобразования могут быть фактически выражены через углы поворота координатных осей.

По определению оператора момента (в данном случае спина), выражение $1 + i\delta\varphi\cdot\mathbf{n}\hat{\mathbf{s}}$ есть оператор поворота на угол $\delta\varphi$ вокруг направления, задаваемого единичным вектором $\mathbf{n}$; в применении к волновой функции частицы со спином 1/2, т. е. к спинору первого ранга, надо положить в этом операторе $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2$. Оператор же поворота на конечный угол φ вокруг того же направления будет соответственно даваться формулой

$$\hat{U}_{\mathbf{n}} = \exp(i\varphi\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}}/2) \tag{58,1}$$

(ср. (15,13)). Как и всякая функция матриц Паули (см. задачу 1 § 55), это выражение сводится к линейному по этим матрицам выражению

$$\hat{U}_{\mathbf{n}} = \cos\frac{\varphi}{2} + i\mathbf{n}\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\sin\frac{\varphi}{2}. \tag{58,2}$$

Так, для поворота вокруг оси z находим

$$\hat{U}_z(\varphi) = \cos\frac{\varphi}{2} + i\hat{\sigma}_z\sin\frac{\varphi}{2} = \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}. \tag{58,3}$$

Это значит, что компоненты спинора при таком повороте преобразуются по закону

$$\psi^{1'} = \psi^1 e^{i\varphi/2}, \quad \psi^{2'} = \psi^2 e^{-i\varphi/2}.$$

В частности, при повороте на угол 2π компоненты спинора меняют знак; таким же свойством будут, следовательно, обладать также и спиноры любого нечетного ранга (ср. конец § 55).

Аналогичным образом найдем матрицы преобразований, состоящих в повороте на угол φ вокруг оси x или оси y:

$$\hat{U}_x(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & i\sin\frac{\varphi}{2} \\ i\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{U}_y(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} & \sin\frac{\varphi}{2} \\ -\sin\frac{\varphi}{2} & \cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}. \tag{58,4}$$

Отметим частный случай поворота на угол π вокруг оси y, при котором

$$\psi^{1'} = \psi^2, \quad \psi^{2'} = -\psi^1,$$

т. е.

$$\psi^{1'} = \psi_1, \quad \psi^{2'} = \psi_2. \tag{58,5}$$

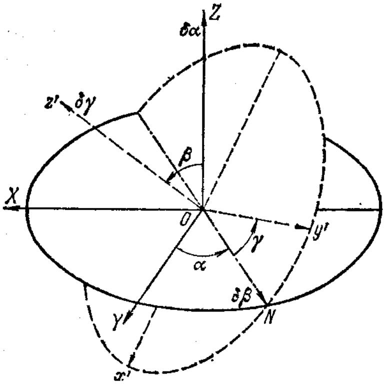

Рис. 20

Легко написать теперь матрицу преобразования при произвольном повороте координатных осей в зависимости от углов Эйлера, определяющих этот поворот.

Вращение осей, определяемое углами Эйлера α, β, γ, производится в три приема: 1) поворот на угол α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ вокруг оси z, 2) поворот на угол β $(0 \leqslant \beta \leqslant \pi)$ вокруг нового положения оси y (ON на рис. 20, так называемая *линия узлов*), 3) поворот на угол γ $(0 \leqslant \gamma \leqslant 2\pi)$ вокруг получившегося окончательного положения (z') оси z [1]).

---

[1]) Системы xyz и $x'y'z'$, как всегда, — правовинтовые, а положительное направление отсчета углов отвечает направлению буравчика, завинчиваемого в положительном направлении оси поворота.

Данное здесь определение углов Эйлера (принятое в квантовомеханических применениях) отличается от определения в I, § 35 тем, что второй поворот производится вокруг оси y, а не вокруг оси x. Углы α, β, γ связаны с углами φ, θ, ψ в т. I (не смешивать со сферическими углами φ, θ!) посредством

$$\varphi = \alpha + \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \beta, \quad \psi = \gamma - \frac{\pi}{2}.$$

Очевидно, что углы α, β совпадают со сферическими углами φ, θ новой оси z' по отношению к осям xyz: $\alpha = \varphi$, $\beta = \theta$.

Соответственно такому способу поворота осей, матрица полного преобразования равна произведению трех матриц (58,3)—(58,4):

$$\hat{U}(\alpha, \beta, \gamma) = \hat{U}_z(\gamma)\,\hat{U}_y(\beta)\,\hat{U}_z(\alpha).$$

Непосредственным перемножением матриц окончательно находим

$$\hat{U}(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2}\cdot e^{i(\alpha+\gamma)/2} & \sin\frac{\beta}{2}\cdot e^{-i(\alpha-\gamma)/2} \\ -\sin\frac{\beta}{2}\cdot e^{i(\alpha-\gamma)/2} & \cos\frac{\beta}{2}\cdot e^{-i(\alpha+\gamma)/2} \end{pmatrix}. \tag{58,6}$$

Спиноры высших рангов преобразуются, по определению, как произведения компонент спинора первого ранга. В физических применениях, однако, представляют интерес не столько законы преобразования самих спиноров, сколько отвечающих им волновых функций ψ_{jm}.

Пусть функции ψ_{jm} ($m = j, j-1, \ldots, -j$) описывают в координатной системе xyz состояние с определенным значением момента j, а функции $\psi_{jm'}$ — то же состояние по отношению к осям $x'y'z'$; в первом случае m есть значение j_z, а во втором: $m' = j_{z'}$. Те и другие функции связаны друг с другом линейными соотношениями, которые запишем в виде

$$\psi_{jm} = \sum_{m'} D^{(j)}_{m'm}(\alpha, \beta, \gamma)\,\psi_{jm'}. \tag{58,7}$$

Коэффициенты $D^{(j)}_{m'm}$ составляют (по отношению к индексам $m'm$) матрицу ранга $2j+1$ — *матрицу конечных вращений* $\hat{D}^{(j)}$; ее элементы являются функциями углов поворота α, β, γ системы $x'y'z'$ относительно xyz.

Конструктивное построение матрицы конечных вращений может быть произведено с помощью спинорного представления функций ψ_{jm}.

При $j = 1/2$ две функции $\psi_{1/2m}$ ($m = \pm 1/2$) составляют ковариантный спинор первого ранга. Согласно (56,13) его преобразование (от системы $x'y'z'$ к системе xyz) осуществляется матрицей $\hat{U}$ (58,6), так что $\hat{D}^{(1/2)} = \hat{U}$ [1]). Запишем ее элементы в виде

$$D^{(1/2)}_{m'm} = e^{im'\gamma} d^{(1/2)}_{m'm}(\beta)\, e^{im\alpha},$$

[1]) Обратим внимание на то, что матричные индексы в (58,7) как раз расположены в порядке, отвечающем перемножению столбцов матрицы $\hat{D}^{(j)}$ с расположенными в строку функциями $\psi_{jm'}$. В символической записи равенство (58,7) должно было бы быть написано как $\psi_{jm} = (\psi'_{j}\hat{D}^{(j)})_m$ — в соответствии с записью в (56,13).

где

$$d^{(1/2)}_{m'm}(\beta) = \begin{array}{c|cc} m' \diagdown m & 1/2 & -1/2 \\ \hline 1/2 & \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ -1/2 & -\sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{array} \qquad (58,8)$$

При произвольном значении j функции ψ_{jm} связаны с компонентами симметричного ковариантного спинора ранга $2j$ формулой (57,6). Матрица преобразования компонент спинора ранга $2j$ есть произведение $2j$ матриц $\hat{D}^{(1/2)}$, каждая из которых действует на один из спинорных индексов. Произведя перемножение и вернувшись снова к функциям ψ_{jm}, получим матрицу преобразования последних в виде

$$D^{(j)}_{m'm}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = e^{im'\gamma} d^{(j)}_{m'm}(\beta) e^{im\alpha}, \qquad (58,9)$$

причем функции $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ даются формулой [1])

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = \left[\frac{(j+m')!\,(j-m')!}{(j+m)!\,(j-m)!}\right]^{1/2} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{m'+m} \times$$
$$\times \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{m'-m} P^{(m'-m,\ m'+m)}_{j-m'}(\cos\beta), \qquad (58,10)$$

где

$$P^{(a,\ b)}_n(\cos\beta) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-\cos\beta)^{-a}(1+\cos\beta)^{-b} \times$$
$$\times \left(\frac{d}{d\cos\beta}\right)^n [(1-\cos\beta)^{a+n}(1+\cos\beta)^{b+n}] \qquad (58,11)$$

— так называемые *полиномы Якоби* [2]). Отметим, что

$$P^{(a,\ b)}_n(-\cos\beta) = (-1)^n P^{(b,\ a)}_n(\cos\beta). \qquad (58,12)$$

Функции $d^{(j)}_{m'm}$ обладают рядом свойств симметрии, которые можно было бы усмотреть из выражений (58,11) и (58,12), но

[1]) Проведение вычислений можно найти в книге: *A. R. Edmonds*, Angular momentum in quantum mechanics, Princeton, 1957 (см. также перевод статьи того же автора в сб. «Деформация атомных ядер», ИЛ, 1958). Определение функций $D^{(j)}_{m'm}$, согласно (58,9—10), отличается от принятого в книге Эдмондса перестановкой α и γ (что более естественно в излагаемом подходе), а от принятого в статье еще и изменением знаков всех углов.

[2]) Связь этих полиномов с гипергеометрическим рядом — см. § е (формула (е, 11)).

проще вывести непосредственно из их определения как коэффициентов вращательного преобразования.

Матрица $\hat{D}^{(j)}$ как матрица вращательного преобразования унитарна. Поскольку преобразование, обратное повороту (α, β, γ), есть поворот ($-\gamma$, $-\beta$, $-\alpha$), то для вещественной матрицы $d^{(j)}$ отсюда получаются соотношения

$$d^{(j)}_{m'm}(-\beta) = d^{(j)}_{mm'}(\beta). \tag{58,13}$$

Далее, справедливы равенства

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = d^{(j)}_{-m,\,-m'}(\beta), \tag{58,14}$$

$$\begin{gathered} d^{(j)}_{m'm}(\pi) = (-1)^{j+m}\delta_{m',\,-m}, \\ d^{(j)}_{m'm}(-\pi) = (-1)^{j-m}\,\delta_{m',-m}, \quad d^{(j)}_{m'm}(0) = \delta_{m'm}. \end{gathered} \tag{58,15}$$

При $j = 1/2$ они очевидны из (58,8), а их обобщение для произвольных j очевидно из описанного выше способа построения матрицы преобразования.

Произведем поворот на угол $\pi-\beta$ как два последовательных поворота на углы π и $-\beta$:

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi-\beta) = \sum_{m''} d^{(j)}_{m'm''}(\pi)\, d^{(j)}_{m''m}(-\beta) = (-1)^{j-m'}\, d^{(j)}_{-m'm}(-\beta),$$

или, используя (58,13),

$$d^{(j)}_{m'm}(\pi-\beta) = (-1)^{j-m'}\, d^{(j)}_{m,\,-m'}(\beta). \tag{58,16}$$

Результат двух поворотов вокруг одной и той же оси не зависит от их последовательности. Поэтому мы должны получить тот же результат, произведя повороты $-\beta$ и π в обратном порядке. Сделав это и сравнив ответ с (58,16), получим соотношение

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = (-1)^{m'-m}\, d^{(j)}_{-m',\,-m}(\beta). \tag{58,17}$$

Из (58,17), (58,14) и (58,13) следует, что

$$d^{(j)}_{m'm}(\beta) = (-1)^{m'-m}\, d^{(j)}_{mm'}(\beta) = (-1)^{m'-m}\, d^{(j)}_{m'm}(-\beta). \tag{58,18}$$

На основании (58,13)—(58,18) могут быть написаны различные свойства симметрии полных функций $D^{(j)}_{m'm}$. Отметим, в частности, выражение комплексно сопряженной функции

$$D^{(j)*}_{m'm}(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = D^{(j)}_{m'm}(-\alpha,\ \beta,\ -\gamma) = (-1)^{m'-m}\, D^{(j)}_{-m',\,-m}(\alpha, \beta, \gamma). \tag{58,19}$$

С математической точки зрения, матрицы $\hat{D}^{(j)}$ дают унитарные неприводимые представления группы вращений с размерностью

$2j+1$ (см. ниже, § 98). Отсюда сразу следует соотношение ортогональности и нормировки

$$\int D^{(j_1)*}_{m_1'm_1}(\alpha,\beta,\gamma)\, D^{(j_2)}_{m_2'm_2}(\alpha,\beta,\gamma)\frac{d\omega}{8\pi^2}=\frac{1}{2j_1+1}\delta_{j_1j_2}\delta_{m_1m_2}\delta_{m_1'm_2'}, \tag{58,20}$$

где $d\omega=\sin\beta\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$.

Ортогональность функций по индексам m и m' обеспечивается множителем $\exp\{i(m\alpha+m'\gamma)\}$. Ортогональность же по индексу j связана с функциями $d^{(j)}_{m'm}$, для которых имеем

$$\int\limits_0^\pi d^{(j_1)}_{m'm}(\beta)\, d^{(j_2)}_{m'm}(\beta)\frac{\sin\beta\, d\beta}{2}=\frac{1}{2j_1+1}\delta_{j_1j_2}. \tag{58,21}$$

Наконец, приведем, для справок, выражения функций $d^{(j)}_{m'm}$ для некоторых частных значений параметров. При $j=1$ имеем

$$d^{(1)}_{m'm}(\beta)=\begin{array}{c|ccc} m' \backslash m & 1 & 0 & -1 \\ \hline 1 & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \cos\beta & \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta \\ -1 & \frac{1}{2}(1-\cos\beta) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\beta & \frac{1}{2}(1+\cos\beta) \end{array} \tag{58,22}$$

При целом $j=l$ и $m'=0$ формулы (58,10) и (58,11) дают

$$d^{(l)}_{0m}(\beta)=(-1)^m d^{(l)}_{m0}(\beta)=(-1)^m\sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_l^m(\cos\beta). \tag{58,23}$$

Происхождение этой формулы легко проследить из исходного определения (58,7). Будем относить значения функций $\psi_{lm'}$ в правой стороне (58,7) к оси z', на которой имеем (при $j=l$)

$$Y_{lm'}(\mathbf{n}_{z'})=i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\delta_{m'0}. \tag{58,24}$$

Функция же ψ_{jm} в левой стороне будет тогда шаровой функцией $Y_{lm}(\beta,\alpha)$ от сферических углов $\varphi\equiv\alpha$, $\theta\equiv\beta$ направления оси z'. Подставив (58,24) в (58,7), получим

$$Y_{lm}(\beta,\alpha)=i^l\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}D^{(l)}_{0m}(\alpha,\beta,\gamma), \tag{58,25}$$

что эквивалентно (58,23).

Наконец, приведем выражение функции при наибольшем возможном значении одного из индексов m, m':

$$d^{(j)}_{jm}(\beta) = (-1)^{j-m} d^{(j)}_{mj} =$$
$$= \left[\frac{(2j)!}{(j+m)!\,(j-m)!}\right]^{1/2} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j+m} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{j-m}. \quad (58,26)$$

§ 59. Частичная поляризация частиц

Надлежащим выбором направления оси z всегда можно обратить в нуль одну из компонент (например, ψ^2) заданного спинора ψ^λ — волновой функции частицы со спином 1/2. Это очевидно уже из того, что направление в пространстве определяется двумя величинами (углами), т. е. число имеющихся в нашем распоряжении параметров как раз равно числу величин (вещественная и мнимая части комплексного ψ^2), которые мы хотим обратить в нуль.

Физически это значит, что если частица со спином 1/2 (будем говорить для определенности об электроне) находится в состоянии, описываемом некоторой спиновой волновой функцией, то существует такое направление в пространстве, вдоль которого проекция спина частицы имеет определенное значение $\sigma = 1/2$. Можно сказать, что в таком состоянии электрон *полностью поляризован.*

Существуют, однако, и такие состояния электрона, которые можно назвать *частично поляризованными.* Эти состояния описываются не волновыми функциями, а лишь матрицами плотности, т. е. они являются смешанными (по спину) состояниями (см. § 14).

Спиновая (или *поляризационная*) матрица плотности электрона представляет собой спинор второго ранга $\rho^{\lambda\mu}$, нормированный условием

$$\rho^\lambda{}_\lambda = \rho^1{}_1 + \rho^2{}_2 = 1 \quad (59,1)$$

и удовлетворяющий условию «эрмитовости»

$$(\rho^\lambda{}_\mu)^* = \rho^\mu{}_\lambda. \quad (59,2)$$

В случае чистого (т. е. вполне поляризованного) спинового состояния электрона спинор $\rho^\lambda{}_\mu$ сводится к произведению компонент волновой функции ψ^λ:

$$\rho^\lambda{}_\mu = \psi^\lambda (\psi^\mu)^*. \quad (59,3)$$

Диагональные компоненты матрицы плотности определяют вероятности значений +1/2 и —1/2 проекции спина электрона на ось z. Поэтому среднее значение этой проекции

$$\bar{s}_z = \frac{1}{2}(\rho^1{}_1 - \rho^2{}_2),$$