Наконец, приведем выражение функции при наибольшем возможном значении одного из индексов m, m':

$$d^{(j)}_{jm}(\beta) = (-1)^{j-m} d^{(j)}_{mj} =$$
$$= \left[\frac{(2j)!}{(j+m)!\,(j-m)!}\right]^{1/2} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{j+m} \left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{j-m}. \quad (58,26)$$

§ 59. Частичная поляризация частиц

Надлежащим выбором направления оси z всегда можно обратить в нуль одну из компонент (например, ψ^2) заданного спинора ψ^λ — волновой функции частицы со спином 1/2. Это очевидно уже из того, что направление в пространстве определяется двумя величинами (углами), т. е. число имеющихся в нашем распоряжении параметров как раз равно числу величин (вещественная и мнимая части комплексного ψ^2), которые мы хотим обратить в нуль.

Физически это значит, что если частица со спином 1/2 (будем говорить для определенности об электроне) находится в состоянии, описываемом некоторой спиновой волновой функцией, то существует такое направление в пространстве, вдоль которого проекция спина частицы имеет определенное значение $\sigma = 1/2$. Можно сказать, что в таком состоянии электрон *полностью поляризован*.

Существуют, однако, и такие состояния электрона, которые можно назвать *частично поляризованными*. Эти состояния описываются не волновыми функциями, а лишь матрицами плотности, т. е. они являются смешанными (по спину) состояниями (см. § 14).

Спиновая (или *поляризационная*) матрица плотности электрона представляет собой спинор второго ранга $\rho^{\lambda\mu}$, нормированный условием

$$\rho^\lambda{}_\lambda = \rho^1{}_1 + \rho^2{}_2 = 1 \quad (59,1)$$

и удовлетворяющий условию «эрмитовости»

$$(\rho^\lambda{}_\mu)^* = \rho^\mu{}_\lambda. \quad (59,2)$$

В случае чистого (т. е. вполне поляризованного) спинового состояния электрона спинор $\rho^\lambda{}_\mu$ сводится к произведению компонент волновой функции ψ^λ:

$$\rho^\lambda{}_\mu = \psi^\lambda (\psi^\mu)^*. \quad (59,3)$$

Диагональные компоненты матрицы плотности определяют вероятности значений $+1/2$ и $-1/2$ проекции спина электрона на ось z. Поэтому среднее значение этой проекции

$$\bar{s}_z = \frac{1}{2}(\rho^1{}_1 - \rho^2{}_2),$$

или, учитывая (59,1),

$$\rho^1{}_1 = 1/2 + \bar{s}_z,\ \rho^2{}_2 = 1/2 - \bar{s}_z. \tag{59,4}$$

В чистом состоянии среднее значение величин $s_\pm = s_x \pm i s_y$ вычисляется как

$$\bar{s}_+ = \psi^{\lambda *} \hat{s}_+ \psi^\lambda,\ \bar{s}_- = \psi^{\lambda *} \hat{s}_- \psi^\lambda.$$

Так как согласно (55,6) и (55,7), операторы $\hat{s}_\pm$ выражаются матрицами

$$\hat{s}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \hat{s}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

то находим

$$\bar{s}_+ = \psi^{1*}\psi^2,\ \bar{s}_- = \psi^{2*}\psi^1.$$

Соответственно в смешанном состоянии будет

$$\rho^1{}_2 = \bar{s}_-,\ \rho^2{}_1 = \bar{s}_+. \tag{59,5}$$

С помощью матриц Паули формулы (59,4) и (59,5) могут быть записаны совместно в виде

$$\rho^\lambda{}_\mu = \frac{1}{2}\left(\delta^\lambda{}_\mu + 2\hat{\sigma}^\lambda{}_\mu \bar{\mathbf{s}}\right). \tag{59,6}$$

Таким образом, все компоненты поляризационной матрицы плотности электрона выражаются через средние значения компонент его вектора спина. Другими словами, вещественный вектор $\bar{\mathbf{s}}$ полностью определяет свойства поляризации частицы со спином 1/2. В предельном случае полной поляризации одна из компонент этого вектора (при соответствующем выборе направления осей) равна 1/2, а две другие — нулю. В обратном случае неполяризованного состояния все три компоненты равны нулю. В общем же случае произвольной частичной поляризации и произвольном выборе системы координат имеет место неравенство $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, где

$$\rho = 2\left(\bar{s}_x^2 + \bar{s}_y^2 + \bar{s}_z^2\right)^{1/2}$$

есть величина, которую можно назвать *степенью поляризации* электрона.

Для частицы с произвольным спином s матрица плотности есть спинор $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ ранга $4s$, симметричный по первым $2s$ и по последним $2s$ индексам и удовлетворяющий условиям

$$\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\lambda\mu\ldots} = 1, \tag{59,7}$$

$$\left(\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}\right)^* = \rho^{\rho\sigma\ldots}{}_{\lambda\mu\ldots}. \tag{59,8}$$

Для подсчета числа независимых компонент матрицы плотности замечаем, что среди возможных наборов значений индексов λ, μ, ... (или индексов ρ, σ, ...) имеется лишь $2s+1$ существенно различных. Учитывая также, что компоненты спинора $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ связаны одним соотношением (59,7), найдем, что число различных компонент равно $(2s+1)^2-1=4s(s+1)$. Хотя эти компоненты являются комплексными величинами, но в силу соотношений (59,8) это обстоятельство не увеличивает общего числа независимых величин, характеризующих состояние частичной поляризации частицы и равного, таким образом, $4s(s+1)$ [1]. Для сравнения укажем, что состояние полной поляризации частицы описывается всего $4s$ величинами ($2s+1$ комплексных компонент волновой функции $\psi^{\lambda\mu\ldots}$, связанных одним условием нормировки и содержащих одну несущественную для описания состояния общую фазу).

Как и всякий спинор ранга $4s$, спинор $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ эквивалентен совокупности неприводимых тензоров рангов $4s$, $4s-2$, ..., 0. В данном случае имеется всего по одному тензору каждого из этих рангов, поскольку в силу свойств симметрии спинора $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ каждое его упрощение может происходить лишь одним способом — по одному (любому) из индексов λ, μ, ... и одному из ρ, σ, ... Кроме того, скаляр (тензор ранга 0) вообще отсутствует, сводясь в силу условия (59,7) к единице.

§ 60. Обращение времени и теорема Крамерса

Симметрия движения по отношению к изменению знака времени в квантовой механике выражается в том, что если ψ есть волновая функция некоторого стационарного состояния системы, то и «обращенная по времени» волновая функция (обозначим ее $\psi^{\text{обр}}$) описывает некоторое возможное состояние с той же энергией. В конце § 18 было указано, что $\psi^{\text{обр}}$ совпадает с комплексно сопряженной функцией ψ^*. В таком простом виде это утверждение относится к волновым функциям без учета спина частиц. При наличии спина оно требует уточнения.

Представим волновую функцию частицы со спином s в виде контравариантного спинора $\psi^{\lambda\mu\ldots}$ (ранга $2s$). При переходе к комплексно сопряженным функциям $\psi^{\lambda\mu\ldots *}$ мы получим, однако, совокупность величин, преобразующихся как компоненты ковариантного спинора. Поэтому операции обращения времени соответствует переход от волновой функции $\psi^{\lambda\mu\ldots}$ к новой волновой функции, ковариантные компоненты которой определяются согласно

$$\psi^{\text{обр}}_{\lambda\mu\ldots}=\psi^{\lambda\mu\ldots *}. \tag{60,1}$$

При заданной совокупности значений индексов λ, μ, ... компоненты ко- и контравариантных спиноров соответствуют отличаю-

---

[1] Задание этих величин эквивалентно заданию средних значений компонент вектора $\mathbf{s}$ и всех их степеней и произведений по 2, 3, ..., $2s$, которые не сводятся еще к более низким степеням (см. задачу 3 § 55).