ственно различных. Учитывая также, что компоненты спинора $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ связаны одним соотношением (59,7), найдем, что число различных компонент равно $(2s+1)^2-1=4s(s+1)$. Хотя эти компоненты являются комплексными величинами, но в силу соотношений (59,8) это обстоятельство не увеличивает общего числа независимых величин, характеризующих состояние частичной поляризации частицы и равного, таким образом, $4s(s+1)$[1]. Для сравнения укажем, что состояние полной поляризации частицы описывается всего $4s$ величинами ($2s+1$ комплексных компонент волновой функции $\psi^{\lambda\mu\ldots}$, связанных одним условием нормировки и содержащих одну несущественную для описания состояния общую фазу).

Как и всякий спинор ранга $4s$, спинор $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ эквивалентен совокупности неприводимых тензоров рангов $4s$, $4s-2$, ..., 0. В данном случае имеется всего по одному тензору каждого из этих рангов, поскольку в силу свойств симметрии спинора $\rho^{\lambda\mu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots}$ каждое его упрощение может происходить лишь одним способом — по одному (любому) из индексов λ, μ, ... и одному из ρ, σ, ... Кроме того, скаляр (тензор ранга 0) вообще отсутствует, сводясь в силу условия (59,7) к единице.

§ 60. Обращение времени и теорема Крамерса

Симметрия движения по отношению к изменению знака времени в квантовой механике выражается в том, что если ψ есть волновая функция некоторого стационарного состояния системы, то и «обращенная по времени» волновая функция (обозначим ее $\psi^{\text{обр}}$) описывает некоторое возможное состояние с той же энергией. В конце § 18 было указано, что $\psi^{\text{обр}}$ совпадает с комплексно сопряженной функцией ψ^*. В таком простом виде это утверждение относится к волновым функциям без учета спина частиц. При наличии спина оно требует уточнения.

Представим волновую функцию частицы со спином s в виде контравариантного спинора $\psi^{\lambda\mu\ldots}$ (ранга $2s$). При переходе к комплексно сопряженным функциям $\psi^{\lambda\mu\ldots *}$ мы получим, однако, совокупность величин, преобразующихся как компоненты ковариантного спинора. Поэтому операции обращения времени соответствует переход от волновой функции $\psi^{\lambda\mu\ldots}$ к новой волновой функции, ковариантные компоненты которой определяются согласно

$$\psi^{\text{обр}}_{\lambda\mu\ldots}=\psi^{\lambda\mu\ldots *}. \tag{60,1}$$

При заданной совокупности значений индексов λ, μ, ... компоненты ко- и контравариантных спиноров соответствуют отличаю-

[1]) Задание этих величин эквивалентно заданию средних значений компонент вектора $\mathbf{s}$ и всех их степеней и произведений по 2, 3, ..., $2s$, которые не сводятся еще к более низким степеням (см. задачу 3 § 55).

щимся по знаку значениям проекции момента. Поэтому в терминах функций $\psi_{s\sigma}$ обращению времени соответствует переход от $\psi_{s\sigma}$ к $\psi_{s,-\sigma}$, как и должно было быть, поскольку изменение знака времени меняет направление момента. Точное соответствие устанавливается согласно (60,1):

$$\psi^{обр}_{s,-\sigma} = \psi^*_{s\sigma}(-1)^{s-\sigma}. \qquad (60,2)$$

Другими словами, замена $\psi_{s\sigma} \to \psi^*_{s\sigma}$, требуемая операцией обращения времени, означает замену [1])

$$\psi_{s\sigma} \to \psi_{s,-\sigma}(-1)^{s-\sigma}. \qquad (60,3)$$

При двукратном повторении этой операции имеем

$$\psi_{s\sigma} \to \psi_{s,-\sigma}(-1)^{s-\sigma} \to \psi_{s\sigma}(-1)^{s-\sigma}(-1)^{s+\sigma} = \psi_{s\sigma}(-1)^{2s}.$$

Таким образом, двукратное обращение времени возвращает волновую функцию к исходному значению лишь при целом спине, а при полуцелом спине оно меняет знак волновой функции.

Рассмотрим произвольную систему взаимодействующих частиц. Орбитальный и спиновый моменты такой системы, каждый в отдельности, при учете релятивистских взаимодействий, вообще говоря, не сохраняются. Сохраняется лишь полный момент **J**. Если никакого внешнего поля нет, то каждый уровень энергии системы $(2J+1)$ кратно вырожден. При включении внешнего поля это вырождение, вообще говоря, снимается. Возникает вопрос о том, может ли вырождение быть снятым полностью, т. е. так, чтобы система имела только простые уровни. Этот вопрос тесно связан с симметрией по отношению к обращению времени.

В классической электродинамике имеет место инвариантность уравнений по отношению к изменению знака времени, если при этом оставить неизменным электрическое поле и изменить знак магнитного поля [2]). Это фундаментальное свойство движения должно сохраняться и в квантовой механике. Поэтому симметрия по отношению к обращению времени имеет место не только для замкнутой системы, но и во всяком внешнем электрическом поле (при отсутствии магнитного поля).

Волновые функции системы представляют собой спиноры $\psi^{\lambda\mu\ldots}$, ранг n которых равен удвоенной сумме спинов всех частиц ($n = 2\sum s_a$); эта сумма может не совпадать с полным спином S системы. Согласно сказанному выше мы можем утверждать, что в произвольном электрическом поле волновая функция и обращенная к ней по времени функция должны соответствовать состояниям с одинаковой энергией. Для того чтобы уровень был невырожденным, во всяком случае необходимо, чтобы эти состоя-

[1]) Обратим внимание на соответствие правила комплексного сопряжения сферической функции, согласно (28,9), с общим правилом (60,3).

[2]) См. II, § 17. См. также замечание в конце § 111.

ния были тождественными, т. е. соответствующие волновые функции должны совпадать с точностью до постоянного множителя. При этом, конечно, обе должны быть выражены в виде одинаковых (ко- или контравариантных) спиноров.

Напишем $\psi^{\text{обр}}_{\lambda\mu\ldots} = C\psi_{\lambda\mu\ldots}$, или, согласно (60,1),

$$\psi^{\lambda\mu\ldots *} = C\psi_{\lambda\mu\ldots}, \tag{60.4}$$

где C — постоянная. Взяв комплексно сопряженное от обеих сторон этого равенства, получим

$$\psi^{\lambda\mu\ldots} = C^*\psi^*_{\lambda\mu\ldots}.$$

Опустим индексы в левой стороне равенства, соответственно подняв их в правой. Это значит, что мы умножаем обе стороны равенства на $g_{\alpha\lambda}\, g_{\beta\mu}\ldots$ и суммируем по индексам λ, μ, ...; при этом в правой стороне надо воспользоваться тем, что

$$g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}\ldots = (-1)^n g^{\lambda\alpha}g^{\mu\beta}\ldots$$

В результате получим

$$\psi_{\lambda\mu\ldots} = C^*(-1)^n\psi^{\lambda\mu\ldots *}.$$

Подставив $\psi^{\lambda\mu\ldots *}$ из (60,4), найдем

$$\psi_{\lambda\mu\ldots} = (-1)^n CC^*\psi_{\lambda\mu\ldots}.$$

Это равенство должно выполняться тождественно, т. е. должно быть $(-1)^n CC^* = 1$. Но поскольку $|C|^2$ во всяком случае положительно, то ясно, что это возможно лишь при четном n (т. е. при целочисленном значении суммы $\sum s_a$). При нечетном n (при полуцелом значении $\sum s_a$) [1]) условие (60,4) не может выполняться.

Таким образом, мы приходим к результату, что электрическое поле может полностью снять вырождение только у системы с целочисленным значением суммы спинов частиц. У системы с полуцелой суммой спинов в произвольном электрическом поле все уровни должны быть двукратно вырождены, причем двум различным состояниям с одинаковой энергией соответствуют комплексно сопряженные спиноры [2]) (*H. A. Kramers*, 1930).

Сделаем еще одно замечание математического характера. Соотношение вида (60,4) с вещественной постоянной C представляет собой, с математической точки зрения, условие того, чтобы компонентам спинора можно было поставить в соответствие набор каких-либо вещественных величин; такое условие можно назвать

---

[1]) При целой (полуцелой) сумме Σs_a целыми (полуцелыми) являются также и все возможные значения полного спина S системы.

[2]) Если электрическое поле обладает высокой симметрией (кубической), то может иметь место и четырехкратное вырождение (см. § 99 и задачу к нему).

условием «вещественности» спинора [1]). Невозможность выполнения соотношения (60,4) при нечетном n означает, что никакому спинору нечетного ранга не может быть сопоставлена вещественная величина. Напротив, при четном n условие (60,4) может выполняться, причем C может быть вещественной. В частности, симметричному спинору второго ранга может быть приведен в соответствие вещественный вектор, если выполняется условие (60,4) с $C = 1$:

$$\psi^{\lambda\mu *} = \psi_{\lambda\mu}$$

(в чем легко убедиться с помощью формул (57,8)—(57,9)). Вообще, условие (60,4) с $C = 1$ является условием «вещественности» симметричного спинора любого четного ранга.

[1]) Говорить о вещественности спинора в буквальном смысле вообще не имеет смысла, поскольку комплексно сопряженные спиноры имеют различные законы преобразования.