

ТОЖДЕСТВЕННОСТЬ ЧАСТИЦ

§ 61. Принцип неразличимости одинаковых частиц

В классической механике одинаковые частицы (скажем, электроны), несмотря на тождественность их физических свойств, не теряют все же своей «индивидуальности»: можно представить себе частицы, входящие в состав данной физической системы, в некоторый момент времени «перенумерованными» и в дальнейшем следить за движением каждой из них по своей траектории; тогда в любой момент времени частицы можно будет идентифицировать.

В квантовой же механике положение совершенно меняется. Уже неоднократно указывалось, что в силу принципа неопределенности понятие о траектории электрона полностью теряет смысл. Если положение электрона точно известно в настоящий момент времени, то уже в следующий момент его координаты вообще не имеют никакого определенного значения. Поэтому, локализовав электроны и перенумеровав их в некоторый момент времени, мы этим ничего не добьемся для целей их идентификации в дальнейшие моменты времени; локализовав один из электронов в другой момент времени в некоторой точке пространства, мы не сможем указать, какой именно из электронов попал в эту точку.

Таким образом, в квантовой механике принципиально не существует никакой возможности следить в отдельности за каждой из одинаковых частиц и тем самым различать их. Можно сказать, что в квантовой механике одинаковые частицы полностью теряют свою «индивидуальность». Одинаковость частиц по их физическим свойствам имеет здесь весьма глубокий характер — она приводит к полной неразличимости частиц.

Этот, как говорят, *принцип неразличимости* одинаковых частиц играет основную роль в квантовой теории систем, состоящих из одинаковых частиц. Начнем с рассмотрения системы, состоящей всего из двух частиц. В силу их тождественности состояния системы, получающиеся друг из друга просто перестановкой обеих частиц, должны быть физически полностью эквивалентными. Это значит, что в результате такой перестановки волновая функция системы может измениться только на несущественный фазовый множитель. Пусть $\psi(\xi_1, \xi_2)$ — волновая функция системы, причем

ξ_1, ξ_2 условно обозначают совокупности трех координат и проекции спина каждой из частиц. Тогда должно быть:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = e^{i\alpha} \psi(\xi_2, \xi_1),$$

где α — некоторая вещественная постоянная. В результате повторной перестановки мы вернемся к исходному состоянию, между тем как функция ψ окажется умноженной на $e^{2i\alpha}$. Отсюда следует, что $e^{2i\alpha} = 1$ или $e^{i\alpha} = \pm 1$. Таким образом, $\psi(\xi_1, \xi_2) = \pm \psi(\xi_2, \xi_1)$.

Мы приходим к результату, что имеется всего две возможности — волновая функция либо симметрична (т. е. совершенно не меняется в результате перестановки частиц), либо антисимметрична (т. е. при перестановке меняет знак). Очевидно, что волновые функции всех состояний одной и той же системы должны иметь одинаковую симметрию; в противном случае волновая функция состояния, представляющего собой суперпозицию состояний различной симметрии, была бы ни симметрична, ни антисимметрична.

Этот результат непосредственно обобщается на системы, состоящие из произвольного числа одинаковых частиц. Действительно, в силу одинаковости частиц ясно, что если какая-либо их пара обладает свойством описываться, скажем, симметричными волновыми функциями, то и всякая другая пара таких же частиц будет обладать тем же свойством. Поэтому волновая функция одинаковых частиц должна либо совершенно не меняться при перестановке любой пары частиц (а потому и при всякой вообще взаимной перестановке частиц), либо менять знак при перестановке каждой пары. В первом случае говорят о *симметричной*, а во втором случае — об *антисимметричной* волновой функции.

Свойство описываться либо симметричными, либо антисимметричными волновыми функциями зависит от рода частиц. О частицах, описывающихся антисимметричными функциями, говорят, как о подчиняющихся *статистике Ферми* — *Дирака* или о *фермионах*, а о частицах, описывающихся симметричными функциями, — как подчиняющихся *статистике Бозе* — *Эйнштейна* или о *бозонах*¹⁾.

Из законов релятивистской квантовой механики оказывается возможным показать (см. IV, § 25), что статистика, которой подчиняются частицы, однозначно связана с их спином: частицы

¹⁾ Эта терминология связана с названием статистик, которыми описывается идеальный газ, состоящий из частиц соответственно с антисимметричными или симметричными волновыми функциями. В действительности мы имеем здесь дело не только с различными статистиками, но и по существу с различными механиками. Статистика Ферми была предложена Ферми (*E. Fermi*) для электронов в 1926 г., а ее связь с квантовой механикой была выяснена Дираком (1926). Статистика Бозе была предложена Бозе (*S. Bose*) для световых квантов и обобщена Эйнштейном (1924).

с полуцелым спином являются фермионами, а с целым спином — бозонами.

Статистика сложных частиц определяется четностью числа входящих в их состав элементарных фермионов. Действительно, перестановка двух одинаковых сложных частиц эквивалентна одновременной перестановке нескольких пар одинаковых элементарных частиц. Перестановка бозонов не изменяет волновой функции вообще, а перестановка фермионов меняет ее знак. Поэтому сложные частицы, содержащие нечетное число элементарных фермионов, подчиняются статистике Ферми, а содержащие четное число их, — статистике Бозе. Этот результат находится, конечно, в согласии с указанным выше общим правилом: сложная частица имеет целый или полуцелый спин в зависимости от того, четно или нечетно число входящих в ее состав частиц с полуцелым спином.

Так, атомные ядра с нечетным атомным весом (т. е. состоящие из нечетного числа протонов и нейтронов) подчиняются статистике Ферми, а с четным весом — статистике Бозе. Для атомов же, содержащих наряду с ядрами также и электроны, статистика определяется, очевидно, четностью или нечетностью суммы атомного веса и атомного номера.

Рассмотрим систему, состоящую из N одинаковых частиц, взаимодействием которых друг с другом можно пренебречь. Пусть ψ_1, ψ_2, \dots — волновые функции различных стационарных состояний, в которых может находиться каждая из частиц в отдельности. Состояние системы в целом можно определять перечислением номеров состояний, в которых находятся отдельные частицы. Возникает вопрос о том, каким образом должна быть составлена из функций ψ_1, ψ_2, \dots волновая функция ψ всей системы в целом.

Пусть p_1, p_2, \dots, p_N — номера состояний, в которых находятся отдельные частицы (среди этих номеров могут быть и одинаковые). Для системы бозонов волновая функция $\psi(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$ выражается суммой произведений вида

$$\psi_{p_1}(\xi_1) \psi_{p_2}(\xi_2) \dots \psi_{p_N}(\xi_N) \quad (61,1)$$

со всеми возможными перестановками различных индексов p_1, p_2, \dots ; такая сумма обладает, очевидно, требуемым свойством симметрии. Так, для системы из двух частиц, находящихся в различных ($p_1 \neq p_2$) состояниях:

$$\psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{p_1}(\xi_1) \psi_{p_2}(\xi_2) + \psi_{p_1}(\xi_2) \psi_{p_2}(\xi_1)]. \quad (61,2)$$

Множитель $1/\sqrt{2}$ введен для нормировки (все функции ψ_1, ψ_2, \dots взаимно ортогональны и предполагаются нормированными).

В общем же случае системы произвольного числа частиц N нормированная волновая функция

$$\Psi_{N_1 N_2 \dots} = \left(\frac{N_1! N_2! \dots}{N!} \right)^{1/2} \sum \Psi_{p_1}(\xi_1) \Psi_{p_2}(\xi_2) \dots \Psi_{p_N}(\xi_N), \quad (61,3)$$

где сумма берется по всем перестановкам различных из индексов p_1, p_2, \dots, p_N , а числа N_i указывают, сколько из всех этих индексов имеют одинаковые значения i (при этом $\sum N_i = N$). При интегрировании квадрата $|\Psi|^2$ по $d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_N$ обращаются в нуль все члены, за исключением только квадратов модулей каждого из членов суммы; поскольку общее число членов в сумме (61,3) равно, очевидно, $N!/N_1!N_2! \dots$, то отсюда и получается нормировочный коэффициент в (61,3).

Для системы фермионов волновая функция Ψ есть антисимметричная комбинация произведений (61,1). Так, для системы из двух частиц имеем

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\Psi_{p_1}(\xi_1) \Psi_{p_2}(\xi_2) - \Psi_{p_1}(\xi_2) \Psi_{p_2}(\xi_1)]. \quad (61,4)$$

В общем же случае N частиц волновая функция системы записывается в виде определителя

$$\Psi_{N_1 N_2 \dots} = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \Psi_{p_1}(\xi_1) & \Psi_{p_1}(\xi_2) & \dots & \Psi_{p_1}(\xi_N) \\ \Psi_{p_2}(\xi_1) & \Psi_{p_2}(\xi_2) & \dots & \Psi_{p_2}(\xi_N) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Psi_{p_N}(\xi_1) & \Psi_{p_N}(\xi_2) & \dots & \Psi_{p_N}(\xi_N) \end{vmatrix}. \quad (61,5)$$

Перестановке двух частиц соответствует здесь перестановка двух столбцов определителя, в результате чего последний меняет знак.

Из выражения (61,5) следует важный результат: если среди номеров p_1, p_2, \dots есть два одинаковых, то две строки определителя окажутся одинаковыми и весь определитель обратится тождественно в нуль. Он будет отличным от нуля только в тех случаях, когда все номера p_1, p_2, \dots различны. Таким образом в системе одинаковых фермионов не могут одновременно находиться в одном и том же состоянии две (или более) частицы. Это — так называемый *принцип Паули* (*W. Pauli, 1925*).

§ 62. Обменное взаимодействие

Тот факт, что в уравнении Шредингера не учитывается наличие у частиц спина, отнюдь не обесценивает это уравнение и все получающиеся с его помощью результаты. Дело в том, что элек-

¹⁾ Под интегрированием по $d\xi$ условно подразумевается (здесь и в § 64, 65) интегрирование по координатам вместе с суммированием по σ .