ГЛАВА XIV

СЛОЖЕНИЕ МОМЕНТОВ

§ 106. $3j$-символы

Полученное в § 31 правило сложения моментов определяет возможные значения полного момента системы, состоящей из двух частиц (или более сложных частей), обладающих моментами j_1 и j_2 [1]). Это правило в действительности тесно связано со свойствами волновых функций по отношению к пространственным вращениям и непосредственно следует из свойств спиноров.

Волновые функции частиц с моментами j_1 и j_2 представляют собой симметричные спиноры рангов $2j_1$ и $2j_2$, а волновая функция системы дается их произведением

$$\psi^{(1)\overbrace{\lambda\mu\ldots}^{2j_1}}\psi^{(2)\overbrace{\rho\sigma\ldots}^{2j_2}}. \tag{106,1}$$

Симметризуя это произведение по всем индексам, получим симметричный спинор ранга $2(j_1 + j_2)$, отвечающий состоянию с полным моментом $j_1 + j_2$. Далее, упростим произведение (106,1) по одной паре индексов, из которых один должен принадлежать $\psi^{(1)}$, а другой — $\psi^{(2)}$ (в противном случае получится нуль); при этом, в силу симметрии каждого из спиноров $\psi^{(1)}$ и $\psi^{(2)}$, безразлично, какие именно берутся индексы из $\lambda, \mu, \ldots$, и $\rho, \sigma, \ldots$ После симметризации получим симметричный спинор ранга $2(j_1 + j_2 - 1)$, отвечающий состоянию с моментом $j_1 + j_2 - 1$ [2]).

---

[1]) Строго говоря, мы везде будем иметь в виду, не оговаривая этого каждый раз особо, систему, состоящую из частей, взаимодействие которых настолько слабо, что в первом приближении их моменты можно считать сохраняющимися.

Все излагаемые ниже результаты относятся, конечно, не только к сложению полных моментов двух частиц (или систем), но и к сложению орбитального момента и спина одной и той же системы в предположении достаточной слабости спин-орбитальной связи.

[2]) Во избежание недоразумений полезно сделать следующее замечание. Волновая функция системы из двух частиц есть всегда спинор ранга $2(j_1 + j_2)$, вообще говоря, отличного от $2j$, где j — полный момент системы. Такой спинор, однако, может быть эквивалентен спинору более низкого ранга. Так, волновая функция системы двух частиц с моментами $j_1 = j_2 = 1/2$ есть спинор второго ранга; но если полный момент $j = 0$, то этот спинор антисимметричен и потому сводится к скаляру. Вообще полным моментом j определяется симметрия спинорной волновой функции системы: она симметрична по $2j$ индексам и антисимметрична по остальным индексам.

Продолжая этот процесс, мы найдем в соответствии с известным уже нам правилом, что j пробегает значения от $j_1 + j_2$ до $|j_1 - j_2|$, причем каждое по одному разу.

С математической точки зрения, речь идет здесь о разложении прямого произведения $D^{(j_1)} \times D^{(j_2)}$ двух неприводимых представлений группы вращений (с размерностями $2j_1 + 1$ и $2j_2 + 1$) на неприводимые части. В этих терминах правило сложения моментов записывается в виде разбиения

$$D^{(j_1)} \times D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} + D^{(j_1+j_2-1)} + \ldots + D^{(|j_1-j_2|)}.$$

Для полного решения задачи о сложении моментов мы должны еще рассмотреть вопрос о составлении волновой функции системы с заданным значением полного момента по волновым функциям составляющих ее двух частиц.

Начнем с наиболее простого случая сложения двух моментов в равный нулю суммарный момент. При этом, очевидно, должно быть $j_1 = j_2$, а проекции моментов $m_1 = -m_2$. Пусть ψ_{jm} — нормированные волновые функции состояний одной частицы с моментом j и его проекцией m (в неспинорном представлении). Искомая волновая функция системы ψ_0 представляет собой сумму произведений волновых функций обеих частиц с противоположными значениями m:

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_{m=-j}^{j} (-1)^{j-m} \psi_{jm}^{(1)} \psi_{j,-m}^{(2)} \tag{106,2}$$

(j — общее значение j_1 и j_2). Множитель перед суммой есть результат нормировки. Что касается коэффициентов в сумме, то все они должны быть одинаковы по своей абсолютной величине — уже в силу того, что все значения проекций m моментов частиц равновероятны. Порядок же чередования знаков в (106,2) легко найти с помощью спинорного представления волновых функций. В спинорных обозначениях сумма в (106,2) представляет собой скаляр (полный момент системы равен нулю!)

$$\psi^{(1)\lambda\mu\ldots}\psi^{(2)}_{\lambda\mu\ldots}, \tag{106,3}$$

составленный из двух спиноров ранга $2j$. Заметив это, мы найдем знаки в (106,2) непосредственно из формулы (57,3).

Следует, однако, иметь в виду, что однозначными являются, вообще говоря, лишь относительные знаки членов суммы (106,2), общий же знак может оказаться зависящим от «порядка сложения» моментов. Действительно, если опустить все спинорные индексы (среди которых $j + m$ единиц и $j - m$ двоек) у $\psi^{(1)}$ и поднять у $\psi^{(2)}$, то скаляр (106,3) умножится на $(-1)^{2j}$, т. е. при полуцелом j изменит знак.

Далее, рассмотрим систему с равным нулю полным моментом, составленную из трех частиц с моментами j_1, j_2, j_3 и их проекциями m_1, m_2, m_3. Условие равенства полного момента нулю подразумевает, что $m_1+m_2+m_3=0$, а j_1, j_2, j_3 имеют такие значения, что каждое из них может получиться в результате векторного сложения двух других, т. е. геометрически j_1, j_2, j_3 должны быть сторонами замкнутого треугольника; другими словами, каждое из них не меньше разности и не больше суммы двух других:

$$|j_1-j_2|\leqslant j_3\leqslant j_1+j_2 \text{ и т. д.}$$

Очевидно, что алгебраическая сумма $j_1+j_2+j_3$ является при этом целым числом.

Волновая функция рассматриваемой системы имеет вид суммы

$$\psi_0=\sum_{m_1m_2m_3}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}\psi^{(1)}_{j_1m_1}\psi^{(2)}_{j_2m_2}\psi^{(3)}_{j_3m_3}, \tag{106,4}$$

взятой по значениям каждого из m_i в пределах от $-j_i$ до j_i. Коэффициенты в этой формуле называют *3j-символами Вигнера*. По определению, они отличны от нуля только при условии

$$m_1+m_2+m_3=0.$$

При перестановке индексов 1, 2, 3 волновая функция (106,4) может измениться лишь на несущественный фазовый множитель. Фактически $3j$-символы могут быть определены как чисто вещественные (см. ниже) и тогда неоднозначность ψ_0 может заключаться лишь в неопределенности ее общего знака (как это имеет место и для функции (106,2)). Это значит, что перестановка колонок $3j$-символа может либо оставлять его неизменным, либо менять его знак.

Наиболее симметричный способ определения коэффициентов в сумме (106,4), которым и принято определять $3j$-символы, заключается в следующем. В спинорных обозначениях ψ_0 представляет собой скаляр, составленный как произведение трех спиноров $\psi^{(1)\lambda\mu\ldots}$, $\psi^{(2)\lambda\mu\ldots}$, $\psi^{(3)\lambda\mu\ldots}$, упрощенное по всем парам индексов, каждая из которых относится к двум различным спинорам. Условимся, что в каждой паре, относящейся к частицам *1* и *2*, спинорный индекс будет писаться сверху у $\psi^{(1)}$ и снизу у $\psi^{(2)}$; в паре, относящейся к частицам *2* и *3*, — сверху у $\psi^{(2)}$ и снизу у $\psi^{(3)}$; в паре, относящейся к частицам *3* и *1*, — сверху у $\psi^{(3)}$ и снизу у $\psi^{(1)}$ (легко подсчитать, что всего имеется соответственно $j_1+j_2-j_3$, $j_2+j_3-j_1$ и $j_1+j_3-j_2$ пар каждого из этих «сортов»). Этим правилом знак ψ_0 устанавливается однозначно.

Очевидно, что при таком определении циклическая перестановка индексов 1, 2, 3 оставляет ψ_0 неизменной. Это значит, что $3j$-символ не меняется при циклической перестановке его столбцов. Перестановка же двух (любых) индексов приведет, как легко сообразить, к необходимости поднять нижние и опустить верхние индексы во всех $j_1 + j_2 + j_3$ парах. Это значит, что ψ_0 умножится на $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$; другими словами, $3j$-символы обладают свойством

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \text{ и т. д.,} \qquad (106,5)$$

т. е. меняют знак при перестановке двух колонок, если $j_1 + j_2 + j_3$ — нечетное число.

Наконец, легко видеть, что

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \qquad (106,6)$$

Действительно, изменение знака z-компонент всех моментов может рассматриваться как результат поворота на угол π вокруг оси y. Но такое преобразование эквивалентно поднятию всех нижних и опусканию всех верхних спинорных индексов (см. (58,5)).

От выражения (106,4) можно перейти к важной формуле, определяющей волновую функцию ψ_{jm} системы, состоящей из двух частиц и обладающей заданными значениями j и m. Для этого будем рассматривать совокупность частиц *1* и *2* как одну систему. Поскольку момент $\mathbf{j}$ этой системы вместе с моментом $\mathbf{j}_3$ частицы *3* складывается в равный нулю суммарный момент, должно быть $j = j_3$, $m = -m_3$. Согласно (106,2) можно тогда написать

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \sum_m (-1)^{j-m} \psi_{jm} \psi^{(3)}_{j,\,-m}. \qquad (106,7)$$

Эту формулу надо сравнить с выражением (106,4) (в котором пишем j, $-m$ вместо j_3, m_3). При этом, однако, надо предварительно учесть, что правило составления суммы в (106,7) согласно (106,3) не соответствует правилу составления суммы (106,4): для приведения (106,7) к (106,4) надо, как легко сообразить, переставить верхние и нижние индексы в парах, соответствующих частицам *1* и *3*; это приводит к появлению дополнительного множителя $(-1)^{j_1-j_2+j_3}$. В результате получим [1])

$$\psi_{jm} = (-1)^{j_1-j_2+m} \sqrt{2j+1} \sum_{m_1,\, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \psi^{(1)}_{j_1 m_1} \psi^{(2)}_{j_2 m_2}, \qquad (106,8)$$

где суммирование по m_1 и m_2 производится с учетом условия $m_1 + m_2 = m$.

---

[1]) При обращении времени волновые функции заменяются согласно (60,2):

$$\psi_{jm} \to (-1)^{j-m} \psi_{j,\,-m}.$$

Легко проверить, что при таком преобразовании функций $\psi_{j_1 m_1}$, $\psi_{j_2 m_2}$ в правой стороне (106,8) таким же образом преобразуется и функция ψ_{jm} в левой стороне.

Формула (106,8) дает искомое разложение волновой функции системы по волновым функциям обеих частиц, обладающих определенными моментами j_1 и j_2. Ее можно записать в виде

$$\psi_{jm} = \sum_{m_1 m_2} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \psi^{(1)}_{j_1 m_1} \psi^{(2)}_{j_2 m_2}, \quad m_2 = m - m_1. \qquad (106,9)$$

Коэффициенты

$$\langle m_1 m_2 | jm \rangle = (-1)^{j_1 - j_2 + m} \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \qquad (106,10)$$

составляют матрицу преобразования от полной ортонормированной системы $(2j_1+1)(2j_2+1)$ волновых функций состояний $|m_1 m_2\rangle$ к такой же системе волновых функций состояний $|jm\rangle$ (при заданных значениях j_1, j_2). Их называют *коэффициентами векторного сложения* или *коэффициентами Клебша—Гордана*. Обозначение символом $\langle m_1 m_2 | jm \rangle$ соответствует общему способу обозначений коэффициентов разложения одной системы функций по другой согласно (11,18). Для упрощения записи мы опустили в этом символе совпадающие в обеих системах функций квантовые числа j_1, j_2; при необходимости эти числа включаются в обозначение: $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 jm \rangle$ [1]).

Матрица преобразования (106,9) унитарна (см. § 12). Поэтому коэффициенты обратного преобразования

$$\psi^{(1)}_{j_1 m_1} \psi^{(2)}_{j_2 m_2} = \sum_{j=|j_2-j_1|}^{j_1+j_2} \langle j, m_1+m_2 | m_1 m_2 \rangle \psi_{j, m_1+m_2} \qquad (106,11)$$

комплексно сопряжены с коэффициентами преобразования (106,9). Мы увидим ниже, что эти коэффициенты вещественны; поэтому просто

$$\langle m_1 m_2 | jm \rangle = \langle jm | m_1 m_2 \rangle.$$

Согласно общим правилам квантовой механики квадраты коэффициентов разложения (106,11) определяют вероятности системе иметь те или иные значения j, m (при заданных j_1, m_1 и j_2, m_2).

Унитарность преобразования (106,9) означает, что его коэффициенты удовлетворяют определенным условиям ортогональности. Согласно формулам (12,5)—(12,6) имеем

$$\sum_{m_1, m_2} \langle m_1 m_2 | jm \rangle \langle m_1 m_2 | j'm' \rangle =$$
$$= (2j+1) \sum_{m_1, m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ m_1 & m_2 & -m' \end{pmatrix} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}, \qquad (106,12)$$

---

[1]) В литературе используется также обозначение

$$C^{jm}_{m_1 m_2} \text{ или } C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2}$$

для коэффициентов Клебша—Гордана.

$$\sum_j \langle m_1 m_2 | jm\rangle \langle m_1' m_2' | jm\rangle =$$

$$= \sum_j (2j+1)\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & -m \end{pmatrix} = \delta_{m_1 m_1'}\delta_{m_2 m_2'}. \qquad (106{,}13)$$

Явное общее выражение $3j$-символов довольно громоздко. Оно может быть представлено в виде[1])

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \left[\frac{(j_1+j_2-j_3)!\,(j_1-j_2+j_3)!\,(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}\right]^{1/2} \times$$

$$\times [(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!\,(j_3+m_3)!\,(j_3-m_3)!]^{1/2} \times$$

$$\times \sum_z \{[(-1)^{z+j_1-j_2-m_3}]\,[z!\,(j_1+j_2-j_3-z)!\,(j_1-m_1-z)! \times$$

$$\times (j_2+m_2-z)!\,(j_3-j_2+m_1+z)!\,(j_3-j_1-m_2+z)!]^{-1}\}. \qquad (106{,}14)$$

Суммирование производится по всем целым числам z; однако, поскольку факториал отрицательного числа равен ∞, число членов в сумме фактически конечно. Коэффициент перед суммой явно симметричен по индексам 1, 2, 3; симметрия же суммы выявляется после соответствующего переобозначения переменной суммирования z.

Помимо свойств симметрии (106,5), (106,6), следующих простым образом из определения $3j$-символов, последние обладают еще и другими свойствами симметрии, вывод которых, однако, более сложен, и мы его здесь не приводим. Эти свойства удобно формулировать, если ввести квадратную (3×3) таблицу чисел, связанных с параметрами $3j$-символа следующим образом:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} j_2+j_3-j_1 & j_3+j_1-j_2 & j_1+j_2-j_3 \\ j_1-m_1 & j_2-m_2 & j_3-m_3 \\ j_1+m_1 & j_2+m_2 & j_3+m_3 \end{bmatrix} \qquad (106{,}15)$$

(сумма чисел в каждой строке и каждом столбце этой таблицы равна $j_1+j_2+j_3$). Тогда: 1) перестановка любых двух столбцов

[1]) Коэффициенты разложения (106,9) были впервые вычислены *Вигнером* (1931). Свойства же симметрии этих коэффициентов и симметричное выражение (106,14) для них найдены *Рака* (*G. Racah*, 1942). Наиболее прямым путем вычисления является, вероятно, прямой переход от спинорного представления ψ_0 (надлежащим образом нормированного) к представлению в виде суммы (106,4) с помощью формулы соответствия (57,6) (заметим, что вещественность коэффициента в этой формуле автоматически приводит к вещественности $3j$-символов). Другой вывод дан в книге *Эдмондса* (см. примечание на стр. 264). Из этой же книги взята приведенная ниже таблица $3j$-символов.

таблицы умножает $3j$-символ на $(-1)^{j_1+j_2+j_3}$ (это свойство совпадает с (106,5)); 2) то же справедливо для перестановки любых двух строк (в отношении двух нижних строк это свойство совпадает с (106,6)); 3) $3j$-символ не меняется при замене строк таблицы ее столбцами [1]).

Выпишем ряд более простых формул для некоторых частных случаев. Значение

$$\begin{pmatrix} j & j & 0 \\ m & -m & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m} \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \qquad (106,16)$$

соответствует формуле (106,2). Формулы

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_1+j_2 \\ m_1 & m_2 & -m_1-m_2 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1-j_2+m_1+m_2} \times$$
$$\times \left[\frac{(2j_1)!\,(2j_2)!\,(j_1+j_2+m_1+m_2)!\,(j_1+j_2-m_1-m_2)!}{(2j_1+2j_2+1)!\,(j_1+m_1)!\,(j_1-m_1)!\,(j_2+m_2)!\,(j_2-m_2)!}\right]^{1/2}, \qquad (106,17)$$

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & -j_1-m_3 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{-j_1+j_2+m_3} \times$$
$$\times \left[\frac{(2j_1)!\,(-j_1+j_2+j_3)!\,(j_1+j_2+m_3)!\,(j_3-m_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!\,(j_1-j_2+j_3)!\,(j_1+j_2-j_3)!\,(-j_1+j_2-m_3)!\,(j_3+m_3)!}\right]^{1/2}$$

получаются непосредственно из (106,14). Вывод же формулы

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^p \left[\frac{(j_1+j_2-j_3)!\,(j_1-j_2+j_3)!\,(-j_1+j_2+j_3)!}{(2p+1)!}\right]^{1/2} \times$$
$$\times \frac{p!}{(p-j_1)!\,(p-j_2)!\,(p-j_3)!}, \qquad (106,18)$$

где

$$2p = j_1 + j_2 + j_3$$

есть четное число, требует ряда дополнительных вычислений [2]) (при нечетном $2p$ этот $3j$-символ равен нулю в силу свойства симметрии (106,6)).

В табл. 9 приведены, для справок, значения $3j$-символов для $j_3 = 1/2,\ 1,\ 3/2,\ 2$. Для каждого j_3 указано минимальное число $3j$-символов, из которых с помощью соотношений (106,5), (106,6) можно получить остальные.

---

[1]) См. *Т. Regge*, Nuovo Cimento **10**, 544 (1958); **11**, 116 (1959). Более глубокие математические аспекты свойства симметрии (106,15) (как и указанного ниже свойства (108,3) $6j$-символов) см. в обзорной статье *Я. А. Смородинского* и *Л. А. Шелепина*, УФН **106**, 3 (1972).

[2]) См. указанную выше книгу *Эдмондса*.

Таблица 9

Формулы для $3j$-символов

$$\begin{pmatrix} j+1/2 & j & 1/2 \\ m & -m-1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = (-1)^{j-m-1/2}\left[\frac{j-m-1/2}{(2j+1)(2j+2)}\right]^{1/2}$$

$$(-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j_1 & j & 1 \\ m & -m-m_3 & m_3 \end{pmatrix}$$

j_1	$m_3 = 0$
j	$\dfrac{2m}{[2j(2j+1)(2j+2)]^{1/2}}$
$j+1$	$-\left[\dfrac{2(j+m+1)(j-m+1)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\right]^{1/2}$
j_1	$m_3 = 1$
j	$\left[\dfrac{2(j-m)(j+m+1)}{2j(2j+1)(2j+2)}\right]^{1/2}$
$j+1$	$-\left[\dfrac{(j-m)(j-m+1)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\right]^{1/2}$
	$(-1)^{j-m+1/2}\begin{pmatrix} j_1 & j & 3/2 \\ m & -m-m_3 & m_3 \end{pmatrix}$
j_1	$m_3 = 1/2$
$j+\frac{1}{2}$	$-(j+3m+3/2)\left[\dfrac{j-m+1/2}{2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\right]^{1/2}$
$j+\frac{3}{2}$	$\left[\dfrac{3(j-m+1/2)(j-m+3/2)(j+m+3/2)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)}\right]^{1/2}$
j_1	$m_3 = 3/2$
$j+\frac{1}{2}$	$-\left[\dfrac{3(j-m-1/2)(j-m+1/2)(j+m+3/2)}{2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\right]^{1/2}$
$j+\frac{3}{2}$	$\left[\dfrac{(j-m-1/2)(j-m+1/2)(j-m+3/2)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)}\right]^{1/2}$
	$(-1)^{j-m}\begin{pmatrix} j_1 & j & 2 \\ m & -m-m_3 & m_3 \end{pmatrix}$
j_1	$m_3 = 0$
j	$\dfrac{2[3m^2-j(j+1)]}{[(2j-1)2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)]^{1/2}}$

Таблица 9 (*продолжение*)

$j+1$	$-2m\left[\frac{6(j+m+1)(j-m+1)}{2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)}\right]^{1/2}$
$j+2$	$\left[\frac{6(j+m+2)(j+m+1)(j-m+2)(j-m+1)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)(2j+5)}\right]^{1/2}$
j_1	$m_3 = 1$
j	$(1+2m)\left[\frac{6(j+m+1)(j-m)}{(2j-1)2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\right]^{1/2}$
$j+1$	$-2(j+2m+2)\left[\frac{(j-m+1)(j-m)}{2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)}\right]^{1/2}$
$j+2$	$2\left[\frac{(j+m+2)(j-m+2)(j-m+1)(j-m)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)(2j+5)}\right]^{1/2}$
j_1	$m_3 = 2$
j	$\left[\frac{6(j-m-1)(j-m)(j+m+1)(j+m+2)}{(2j-1)2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)}\right]^{1/2}$
$j+1$	$-2\left[\frac{(j-m-1)(j-m)(j-m+1)(j+m+2)}{2j(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)}\right]^{1/2}$
$j+2$	$\left[\frac{(j-m-1)(j-m)(j-m+1)(j-m+2)}{(2j+1)(2j+2)(2j+3)(2j+4)(2j+5)}\right]^{1/2}$

Задача

Определить угловую зависимость волновых функций частицы со спином 1/2 в состояниях с заданными значениями орбитального момента l, полного момента j и его проекции m.

Решение. Задача решается общей формулой (106,8), в которой надо под $\psi^{(1)}$ понимать собственные функции орбитального момента (т. е. сферические функции Y_{lm_l}), а под $\psi^{(2)}$ — спиновую волновую функцию $\chi(\sigma)$ (где $\sigma = \pm 1/2$):

$$\psi_{jm} = (-1)^{l+m-1/2}\sqrt{2j+1}\sum_{\sigma}\begin{pmatrix} l & 1/2 & j \\ m-\sigma & \sigma & -m \end{pmatrix} Y_{l,\, m-\sigma}\chi(\sigma).$$

Подставив значения $3j$-символов, получим

$$\psi_{l+1/2,\, m} = \sqrt{\frac{j+m}{2j}}\,\chi\left(\frac{1}{2}\right) Y_{l,\, m-1/2} + \sqrt{\frac{j-m}{2j}}\,\chi\left(-\frac{1}{2}\right) Y_{l,\, m+1/2},$$

$$\psi_{l-1/2,\, m} = -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}}\,\chi\left(\frac{1}{2}\right) Y_{l,\, m-1/2} + \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}}\,\chi\left(-\frac{1}{2}\right) Y_{l,\, m+1/2}.$$