Аналогичным образом легко получить следующие формулы суммирования квадратов матричных элементов:

$$\sum_{qm'} |\langle n'j'm'|f_{kq}|njm\rangle|^2 = \frac{1}{2j+1}|\langle n'j'\|f_k\|nj\rangle|^2, \quad (107,11)$$

$$\sum_{mm'} |\langle n'j'm'|f_{kq}|njm\rangle|^2 = \frac{1}{2k+1}|\langle n'j'\|f_k\|nj\rangle|^2. \quad (107,12)$$

В первой из них суммирование производится по q и m' при заданном m, а во второй — по m и m' при заданном q (причем всегда $m' = m + q$).

Рассмотрим, со справочными целями, случай, когда величинами f_{kq} являются сами шаровые функции Y_{kq}, и дадим выражения их матричных элементов для переходов между состояниями одной частицы с целочисленными орбитальными моментами l_1 и l_2, т. е. интегралов

$$\langle l_1m_1|Y_{lm}|l_2m_2\rangle = \int Y^*_{l_1m_1}Y_{lm}Y_{l_2m_2}\,do. \quad (107,13)$$

Помимо правила отбора, соответствующего правилу сложения моментов ($\mathbf{l} + \mathbf{l}_2 = \mathbf{l}_1$), для этих матричных элементов имеет место также правило, согласно которому сумма $l + l_1 + l_2$ должна быть четным числом. Оно связано с сохранением четности, в силу которого произведение четностей $(-1)^{l_1+l_2}$ обоих состояний должно совпадать с четностью $(-1)^l$ рассматриваемой физической величины (см. § 30).

Матричные элементы (107,13) являются частным случаем более общего интеграла, который будет вычислен в § 110 (см. примечание на стр. 526). Они даются формулой

$$\langle l_1m_1|Y_{lm}|l_2m_2\rangle = (-1)^{m_1} i^{-l_1+l_2+l} \begin{pmatrix} l_1 & l & l_2 \\ -m_1 & m & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & l & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \left[\frac{(2l+1)(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi}\right]^{1/2}. \quad (107,14)$$

В частности, при $m_1 = m_2 = m = 0$ находим значение интеграла от произведения трех полиномов Лежандра

$$\int_{-1}^{1} P_l(\mu)P_{l_1}(\mu)P_{l_2}(\mu)\,d\mu = 2\begin{pmatrix} l_1 & l & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2. \quad (107,15)$$

§ 108. 6j-символы

Мы определили в § 106 3j-символы как коэффициенты в сумме (106,4), представляющей собой волновую функцию системы трех частиц с равным нулю полным моментом. С точки зрения трансформационных свойств по отношению к вращениям эта сумма является скаляром. Отсюда следует, что набор $3j$-символов с заданными значениями j_1, j_2, j_3 (и всеми возможными m_1, m_2, m_3) можно рассматривать как совокупность величин, преобразующихся при вращениях по закону, контраградиентному закону преобразования произведений $\psi_{j_1m_1}\psi_{j_2m_2}\psi_{j_3m_3}$ — так, чтобы обеспечить инвариантность всей суммы.

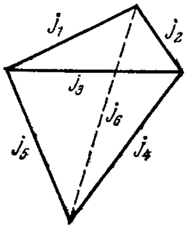

Рис. 45

В связи с такой точкой зрения можно поставить вопрос о построении скаляра, составленного из одних только $3j$-символов. Такой скаляр должен зависеть только от чисел j, но не от чисел m, меняющихся при вращениях. Другими словами, он должен выражаться в виде сумм по всем числам m. Каждое такое суммирование состоит в «упрощении» произведения двух $3j$-символов по правилу

$$\sum_m (-1)^{j-m} \begin{pmatrix} j & . & . \\ m & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j & . & . \\ -m & . & . \end{pmatrix} \tag{108,1}$$

(ср. способ составления скаляра (106,2)).

Поскольку в каждом «упрощении» фигурирует пара чисел m, для составления полного скаляра надо рассматривать произведения четного числа $3j$-символов. Упрощение произведения двух $3j$-символов приводит, в силу свойства их ортогональности, к тривиальному результату:

$$\sum_{m_1m_2m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} (-1)^{j_1+j_2+j_3-m_1-m_2-m_3} =$$

$$= \sum_{m_1m_2m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}^2 = 1$$

(здесь использовано равенство $m_1+m_2+m_3=0$ и формулы (106,6) и (106,12)). Поэтому наименьшее число сомножителей, необходимое для получения нетривиального скаляра, равно четырем. В каждом $3j$-символе три числа j составляют геометрически замкнутый треугольник. Поскольку каждое число j должно фигурировать, при «упрощении», в двух $3j$-символах, то ясно, что при составлении скаляра из произведений четырех $3j$-символов имеется 6 чисел j, которые геометрически должны изображаться длинами ребер неправильного тетраэдра (рис. 45); каждому из $3j$-символов соответствует одна из его граней. В определении искомого скаляра принято определенное условие в отношении проведения процесса упрощения, выражаемое следующей формулой:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \sum_{\text{все } m} (-1)^{\sum_i (j_i - m_i)} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (108,2)$$

Суммирование производится здесь по всем возможным значениям всех чисел m; поскольку, однако, сумма трех m в каждом $3j$-символе должна быть равна нулю, фактически лишь три из шести m независимы. Величины, определенные формулой (108,2), называют *6j-символами* или *коэффициентами Рака*[1]).

Из определения (108,2), с учетом свойств симметрии $3j$-символов, легко убедиться в том, что $6j$-символ не меняется при любой перестановке трех его столбцов, а в каждой паре столбцов можно переставить верхнее и нижнее числа. В силу этих свойств симметрии последовательность чисел $j_1 \ldots j_6$ в $6j$-символе можно представить в 24 эквивалентных видах[2]). Кроме того, $6j$-символы обладают еще одним, менее очевидным, свойством симметрии, устанавливающим равенство между символами с различными наборами чисел j:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & \frac{1}{2}(j_2 + j_5 + j_3 - j_6) & \frac{1}{2}(j_3 + j_6 + j_2 - j_5) \\ j_4 & \frac{1}{2}(j_2 + j_5 + j_6 - j_3) & \frac{1}{2}(j_3 + j_6 + j_5 - j_2) \end{Bmatrix} \quad (108,3)$$

(*T. Regge*, 1959)[3]).

Укажем полезное соотношение между $6j$- и $3j$-символами, которое можно получить с помощью определения (108,2):

$$\sum_{m_4 m_5 m_6} (-1)^{j_4+j_5+j_6-m_4-m_5-m_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_5 & j_6 \\ m_1 & -m_5 & m_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ m_4 & m_2 & -m_6 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_4 & j_5 & j_3 \\ -m_4 & m_5 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}. \quad (108,4)$$

Выражение, суммируемое в левой стороне равенства, отличается от суммы в (108,2), отсутствием одного множителя ($3j$-символа). Можно сказать поэтому, что сумма в (108,4) изображается тетра-

---

[1]) В литературе используется также обозначение

$$W(j_1 j_2 j_4 j_5;\ j_3 j_6) = (-1)^{j_1+j_2+j_4+j_5} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix}.$$

[2]) Если представить себе четырехгранник рис. 45 как правильный тетраэдр, то 24 эквивалентные перестановки чисел j могут быть получены как результат применения 24 преобразований симметрии (поворотов и отражений) тетраэдра.

[3]) См. примечание [1]) на стр. 511.

эдром (рис. 45) без одной из его граней; этим определяется отличие суммы от скаляра. Другими словами, по своим трансформационным свойствам она соответствует одному $3j$-символу — стоящему в правой стороне равенства (108,4), которому она должна быть пропорциональна. Коэффициент же пропорциональности ($6j$-символ в правой стороне равенства) легко получить, умножив обе стороны равенства на $\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$ и просуммировав по оставшимся числам m_1, m_2, m_3.

$6j$-символы появляются естественным образом при рассмотрении следующего вопроса, связанного со сложением трех моментов.

Пусть три момента j_1, j_2, j_3 складываются в результирующий момент J. Заданием момента J (и его проекции M) состояние системы, однако, еще не определяется однозначным образом; оно зависит и от способа сложения моментов (или, как говорят, от схемы их связи).

Рассмотрим, например, такие две схемы связи: 1) сначала моменты j_1 и j_2 складываются в суммарный момент j_{12}, а затем j_{12} и j_3 складываются в окончательный момент J; 2) моменты j_2 и j_3 складываются в j_{23}, а затем j_{23} и j_1 — в J. Первой схеме соответствуют состояния, в которых (наряду с j_1, j_2, j_3, J, M) имеет определенное значение величина j_{12}; их волновые функции обозначим как $\psi_{j_{12}JM}$ (опуская, для краткости, повторяющиеся индексы $j_1j_2j_3$). Аналогично, волновые функции второй схемы связи обозначим как $\psi_{j_{23}JM}$. В обоих случаях значения «промежуточного» момента (j_{12} или j_{23}), вообще говоря, неоднозначны, так что мы имеем (при заданных J, M) два различных набора состояний, различающихся значениями j_{12} или j_{23}. Согласно общим правилам функции этих двух наборов связаны друг с другом определенным унитарным преобразованием

$$\psi_{j_{23}JM} = \sum_{j_{12}} \langle j_{12} | j_{23} \rangle \psi_{j_{12}JM}. \tag{108,5}$$

Из физических соображений очевидно, что коэффициенты этого преобразования не зависят от числа M — они не могут зависеть от ориентации всей системы в пространстве. Таким образом, они зависят лишь от значений шести моментов $j_1j_2j_3j_{12}j_{23}J$, но не от их проекций, т. е. являются скалярными (в указанном выше смысле) величинами. Фактическое вычисление этих коэффициентов легко произвести следующим образом.

Путем двукратного применения формулы (106,9) находим

$$\psi_{j_{23}JM} = \sum_{(m)} \langle m_1 m_{23} | JM \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_{23} m_{23}} =$$
$$= \sum_{(m)} \langle m_1 m_{23} | JM \rangle \langle m_2 m_3 | j_{23} m_{23} \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \psi_{j_3 m_3},$$
$$\psi_{j_{12}JM} = \sum_{(m)} \langle m_3 m_{12} | JM \rangle \langle m_1 m_2 | j_{12} m_{12} \rangle \psi_{j_1 m_1} \psi_{j_2 m_2} \psi_{j_3 m_3}$$

(знак (m) под знаком суммы означает, что суммирование производится по всем входящим в выражение числам m_1, m_2, ...). Используя ортонормированность функций ψ_{jm}, найдем теперь

$$\langle j_{12}|j_{23}\rangle \equiv \int \psi^*_{j_{12}JM}\psi_{j_{23}JM}\,dq =$$
$$= \sum_{(m)} \langle m_3m_{12}|JM\rangle\langle m_1m_{23}|JM\rangle\langle m_1m_2|j_{12}m_{12}\rangle\langle m_2m_3|j_{23}m_{23}\rangle.$$

Сумма в правой стороне равенства берется при заданном значении M, но результат суммирования в действительности (по указанной выше причине) от M не зависит. Поэтому суммирование можно распространить и по значениям M, введя при этом перед суммой множитель $1/(2J+1)$. Выражая затем коэффициенты $\langle m_1m_2|jm\rangle$ через $3j$-символы согласно (106,10), получим:

$$\langle j_{12}|j_{23}\rangle = (-1)^{j_1+j_2+j_3+J}\sqrt{(2j_{12}+1)(2j_{23}+1)}\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & J & j_{23}\end{Bmatrix}. \quad (108,6)$$

Связь $6j$-символов с коэффициентами преобразования (108,5) позволяет легко получить некоторые полезные формулы для суммирования произведений $6j$-символов.

Прежде всего, в силу унитарности преобразования (108,5) (и вещественности его коэффициентов), имеет место соотношение

$$\sum_j (2j+1)(2j''+1)\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ j_3 & j_4 & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_3 & j_2 & j \\ j_1 & j_4 & j''\end{Bmatrix} = \delta_{j'j''}. \quad (108,7)$$

Далее рассмотрим три схемы связи трех моментов — с промежуточными суммами соответственно j_{12}, j_{23} и j_{31}. Коэффициенты соответствующих преобразований (108,6) связаны между собой, согласно правилу умножения матриц, соотношением

$$\sum_{j_{23}} \langle j_{12}|j_{23}\rangle\langle j_{23}|j_{31}\rangle = \langle j_{12}|j_{31}\rangle.$$

Подставив сюда (108,6) и изменив обозначение индексов, получим

$$\sum_j (-1)^{j+j_3+j_6}(2j+1)\begin{Bmatrix} j_2 & j_4 & j_6 \\ j_1 & j_5 & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & j \\ j_2 & j_5 & j_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6\end{Bmatrix}. \quad (108,8)$$

Наконец, путем рассмотрения различных схем связи четырех моментов можно получить [1]) следующую формулу сложения для произведений трех $6j$-символов:

$$\sum_j (-1)^{j+\sum_1^9 j_i}(2j+1)\begin{Bmatrix} j_4 & j_2 & j_6 \\ j_9 & j_8 & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ j_7 & j & j_9\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_4 & j_3 & j_5 \\ j_7 & j_8 & j\end{Bmatrix} =$$
$$= \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} j_6 & j_1 & j_5 \\ j_7 & j_8 & j_9\end{Bmatrix} \quad (108,9)$$

(*L. C. Biedenharn*, *J. P. Elliott*, 1953).

[1]) См. цитированную выше книгу *Эдмондса*.

Приведем, для справок, некоторые явные выражения для $6j$-символов.

$6j$-символ может быть представлен в общем случае в виде следующей суммы:

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_4 & j_5 & j_6 \end{Bmatrix} = \Delta(j_1 j_2 j_3)\,\Delta(j_1 j_5 j_6)\,\Delta(j_4 j_2 j_6)\,\Delta(j_4 j_5 j_3)\times$$

$$\times\sum_z \frac{(-1)^z (z+1)!}{(z-j_1-j_2-j_3)!\,(z-j_1-j_5-j_6)!\,(z-j_4-j_2-j_6)!\,(z-j_4-j_5-j_3)!}\times$$

$$\times(j_1+j_2+j_4+j_5-z)!\,(j_2+j_3+j_5+j_6-z)!\,(j_3+j_1+j_6+j_4-z)!, \tag{108,10}$$

где

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!\,(a-b+c)!\,(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!}\right]^{1/2},$$

а сумма берется по всем положительным целым значениям z, при которых ни один из факториалов в знаменателе не имеет отрицательного аргумента.

В табл. 10 даны формулы $6j$-символов для случаев, когда один из параметров равен 0, 1/2 или 1.

Таблица 10

Формулы для $6j$-символов

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 0 & c & b \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^s}{\sqrt{(2b+1)(2c+1)}}, \qquad s = a+b+c$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{2} & c-\frac{1}{2} & b+\frac{1}{2} \end{Bmatrix} = (-1)^s \left[\frac{(s-2b)(s-2c+1)}{(2b+1)(2b+2)\,2c\,(2c+1)}\right]^{1/2}$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ \frac{1}{2} & c-\frac{1}{2} & b-\frac{1}{2} \end{Bmatrix} = (-1)^s \left[\frac{(s+1)(s-2a)}{2b\,(2b+1)\,2c\,(2c+1)}\right]^{1/2}$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1 & c-1 & b-1 \end{Bmatrix} = (-1)^s \left[\frac{s(s+1)(s-2a-1)(s-2a)}{(2b-1)\,2b\,(2b+1)(2c-1)\,2c\,(2c+1)}\right]^{1/2}$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1 & c-1 & b \end{Bmatrix} = (-1)^s \left[\frac{2(s+1)(s-2a)(s-2b)(s-2c+1)}{2b\,(2b+1)(2b+2)(2c-1)\,2c\,(2c+1)}\right]^{1/2}$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1 & c-1 & b+1 \end{Bmatrix} = (-1)^s \left[\frac{(s-2b-1)(s-2b)(s-2c+1)(s-2c+2)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)(2c-1)\,2c\,(2c+1)}\right]^{1/2}$$

$$\begin{Bmatrix} a & b & c \\ 1 & c & b \end{Bmatrix} = (-1)^{s+1} \frac{2\,[b(b+1)+c(c+1)-a(a+1)]}{[2b\,(2b+1)(2b+2)\,2c\,(2c+1)(2c+2)]^{1/2}}$$

В заключение сделаем несколько замечаний о составляемых из $3j$-символов скалярах более высокого порядка.

Следующим по сложности после $6j$-символа является скаляр, составляемый путем упрощения произведений шести $3j$-символов. Эти $3j$-символы содержат 18 попарно совпадающих чисел j, так что возникающий в результате скаляр зависит от 9 параметров j. Его принято называть *$9j$-символом* и определять следующим образом (*E. Wigner*, 1951) [1]:

$$\begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix} = \sum_{\text{все } m} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{31} & j_{32} & j_{33} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ m_{11} & m_{21} & m_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}. \quad (108,11)$$

Эта величина может быть также представлена в виде суммы произведений трех $6j$-символов:

$$\begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix} = \sum_{j} (-1)^{2j} (2j+1) \begin{Bmatrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ j_{32} & j_{33} & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ j_{21} & j & j_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ j & j_{11} & j_{12} \end{Bmatrix}. \quad (108,12)$$

В эквивалентности (108,11) и (108,12) можно убедиться, подставив в (108,12) определение (108,2) и воспользовавшись свойствами ортогональности $3j$-символов.

$9j$-символ обладает высокой симметрией, следующей непосредственно из определения (108,11) и свойств симметрии $3j$-символов. Легко убедиться, что при перестановке любых его двух строк или двух столбцов $9j$-символ умножается на $(-1)^{\Sigma j}$. Кроме того, $9j$-символ не меняется при транспонировании, т. е. при взаимной замене строк и столбцов.

Скаляры еще более высоких порядков зависят от еще большего числа параметров j. Очевидно, что это число должно быть всегда кратно трем ($3nj$-символы). Мы не будем останавливаться здесь на свойствах этих величин. Упомянем лишь, что при каждом $n > 3$ имеется более чем по одному различному не сводящемуся друг к другу типу $3nj$-символов. Так, имеется два различных типа $12j$-символов [2].

---

[1]) По общему правилу упрощения (108,1) надо было бы писать аргументы m в последних трех $3j$-символах со знаком минус и ввести под знак суммы множитель $(-1)^{\Sigma (j-m)}$. Воспользовавшись, однако, свойством (106,6) $3j$-символов и учитывая, что в данном случае, как легко сообразить, сумма $\sum m$ всех девяти чисел m равна нулю, мы придем к определению (108,11).

[2]) Более подробное изложение теории $9j$-символов, а также о свойствах $3nj$-символов см. цитированную на стр. 264 книгу *Эдмондса* и книги: *А. П. Юцис, И. Б. Левинсон, В. В. Ванагас*, Математический аппарат теории момента количества движения, Вильнюс, 1960; *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский*. Квантовая теория углового момента, «Наука», 1975.