ГЛАВА XV

ДВИЖЕНИЕ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

§ 111. Уравнение Шредингера в магнитном поле

Частица со спином обладает также и определенным «собственным» магнитным моментом μ. Соответствующий ему квантово-механический оператор пропорционален оператору спина $\hat{\mathbf{s}}$, т. е. может быть записан в виде

$$\hat{\mu} = \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}, \tag{111,1}$$

где s — величина спина частицы, а μ — характерная для частицы постоянная. Собственные значения проекции магнитного момента равны $\mu_z = \mu\sigma/s$. Отсюда видно, что коэффициент μ (который и называют обычно просто величиной магнитного момента) представляет собой наибольшее возможное значение μ_z, достигаемое при проекции спина $\sigma = s$.

Отношение $\mu/\hbar s$ дает отношение собственного магнитного момента частицы к ее собственному механическому моменту (когда оба направлены по оси z). Как известно, для обычного (орбитального) момента это отношение равно $e/2mc$ (см. II, § 44). Коэффициент же пропорциональности между собственным магнитным моментом и спином частицы оказывается иным. Для электрона он равен $-|e|/mc$, т. е. вдвое больше обычного значения (такое значение получается теоретически из релятивистского волнового уравнения Дирака — см. IV, § 33). Собственный магнитный момент электрона (спин 1/2) равен, следовательно, $-\mu_B$, где

$$\mu_B = \frac{|e|\hbar}{2mc} = 0{,}927\cdot 10^{-20}\ \frac{\text{эрг}}{\text{Гс}}. \tag{111,2}$$

Эту величину называют *магнетоном Бора*.

Магнитный момент тяжелых частиц принято измерять в *ядерных магнетонах*, определяемых как $e\hbar/2m_pc$, где m_p — масса протона. Эксперимент дает для собственного магнитного момента протона значение 2,79 ядерных магнетонов, причем момент направлен по спину. Магнитный момент нейтрона направлен противоположно спину и равен 1,91 ядерного магнетона.

Обратим внимание на то, что величины μ и $\mathbf{s}$, стоящие в обоих сторонах равенства (111,1), как и следовало, одинаковы по своему векторному характеру: обе являются аксиальными векторами.

Аналогичное же равенство для электрического дипольного момента $\mathbf{d}$ ($\mathbf{d} = \mathrm{const}\cdot\mathbf{s}$) противоречило бы симметрии по отношению к инверсии координат: при инверсии менялся бы относительный знак обеих сторон равенства [1]).

В нерелятивистской квантовой механике магнитное поле может рассматриваться только в качестве внешнего поля. Магнитное взаимодействие частиц друг с другом является релятивистским эффектом, и его учет требует последовательной релятивистской теории.

В классической теории функция Гамильтона заряженной частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$H = \frac{1}{2m}\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi,$$

где φ — скалярный, $\mathbf{A}$ — векторный потенциал поля, а $\mathbf{p}$ — обобщенный импульс частицы (см. II, § 16). Если частица не обладает спином, то переход к квантовой механике производится обычным образом: обобщенный импульс надо заменить оператором $\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla$, и мы получим гамильтониан [2])

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 + e\varphi. \tag{111,3}$$

Если же частица обладает спином, то такая операция недостаточна. Дело в том, что собственный магнитный момент частицы непосредственно взаимодействует с магнитным полем. В классической функции Гамильтона это взаимодействие вообще отсутствует, поскольку сам спин, будучи чисто квантовым эффектом, исчезает при переходе к классическому пределу. Правильное выражение для гамильтониана получится путем введения (в 111,3) дополнительного члена $-\hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{H}$, соответствующего энергии магнитного момента $\boldsymbol{\mu}$ в поле $\mathbf{H}$. Таким образом, гамильтониан частицы, обладающей спином, имеет вид [3])

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \hat{\boldsymbol{\mu}}\mathbf{H} + e\varphi. \tag{111,4}$$

---

[1]) Отметим, что это равенство (а тем самым и существование электрического момента у элементарной частицы) противоречило бы также и симметрии по отношению к обращению времени: изменение знака времени не меняет $\mathbf{d}$, но меняет знак спина (как это очевидно, например, из определения этих величин при орбитальном движении: в определение $\mathbf{d}$ входят лишь координаты, а в определение момента — также и скорость частицы).

[2]) Мы обозначаем здесь обобщенный импульс той же буквой $\mathbf{p}$, что и обычный импульс (вместо $\mathbf{P}$ в II, § 16), с целью подчеркнуть, что ему отвечает тот же оператор.

[3]) Обозначение магнитного поля и гамильтониана одинаковой буквой не может привести к недоразумениям: гамильтониан снабжен шляпкой над буквой.

При раскрытии квадрата $\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2$ надо иметь в виду, что оператор $\hat{\mathbf{p}}$, вообще говоря, не коммутативен с вектором $\mathbf{A}$, являющимся функцией координат. Поэтому надо писать

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 - \frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} + \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{2mc^2}\mathbf{A}^2 - \frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H} + e\varphi. \quad (111,5)$$

Согласно правилу коммутации (16,4) оператора импульса с любой функцией координат имеем

$$\hat{\mathbf{p}}\mathbf{A} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar \operatorname{div} \mathbf{A}. \quad (111,6)$$

Таким образом, $\hat{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{A}$ коммутативны, если $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$. Это, в частности, имеет место для однородного поля, если выбрать его векторный потенциал в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathbf{Hr}]. \quad (111,7)$$

Уравнение $i\hbar\, \partial\Psi/\partial t = \hat{H}\Psi$ с гамильтонианом (111,4) представляет собой обобщение уравнения Шредингера на случай наличия магнитного поля. Волновые функции, на которые действует гамильтониан в этом уравнении, — симметричные спиноры ранга $2s$.

Волновые функции частицы в электромагнитном поле обладают неоднозначностью, связанной с неоднозначностью потенциалов поля. Как известно (см. II, § 18), последние определены лишь с точностью до *калибровочного преобразования*

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \nabla f, \qquad \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad (111,8)$$

где f — произвольная функция координат и времени. Такое преобразование не отражается на значениях напряженностей поля. Ясно поэтому, что оно не должно существенно изменять также и решений волнового уравнения; в частности, должен оставаться неизменным квадрат $|\Psi|^2$. Действительно легко убедиться в том, что мы вернемся к исходному уравнению, если одновременно с заменой (111,8) в гамильтониане произвести также и замену волновой функции согласно

$$\Psi \to \Psi \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f\right). \quad (111,9)$$

Эта неоднозначность волновой функции не сказывается ни на какой имеющей физический смысл величине (в определение которой не входят в явном виде потенциалы).

В классической механике обобщенный импульс частицы связан с ее скоростью соотношением $m\mathbf{v} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}/c$. Для того чтобы найти оператор $\hat{\mathbf{v}}$ в квантовой механике, надо прокоммутировать вектор $\mathbf{r}$ с гамильтонианом. Простое вычисление приводит к результату

$$m\hat{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}, \tag{111,10}$$

в точности аналогичному классическому. Для операторов компонент скорости имеют место правила коммутации

$$\begin{aligned} &\{\hat{v}_x, \hat{v}_y\} = i\frac{e\hbar}{m^2c}H_z, \qquad \{\hat{v}_y, \hat{v}_z\} = i\frac{e\hbar}{m^2c}H_x,\\ &\{\hat{v}_z, \hat{v}_x\} = i\frac{e\hbar}{m^2c}H_y, \end{aligned} \tag{111,11}$$

которые легко проверить непосредственным вычислением. Мы видим, что в магнитном поле операторы трех компонент скорости частицы (заряженной) оказываются некоммутативными. Это значит, что частица не может иметь одновременно определенных значений скорости по всем трем направлениям.

При движении в магнитном поле симметрия по отношению к обращению времени имеет место лишь при условии изменения знака поля $\mathbf{H}$ (и векторного потенциала $\mathbf{A}$). Это значит (см. § 18 и 60), что уравнение Шредингера $\hat{H}\psi = E\psi$ должно сохранить свой вид при переходе к комплексно сопряженным величинам и изменении знака $\mathbf{H}$. Для всех членов в гамильтониане (111,4), за исключением члена $-\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H}$, это непосредственно очевидно. Член же $-\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H}\psi$ в уравнении Шредингера переходит при указанном преобразовании в $\hat{\mathbf{s}}^*\mathbf{H}\psi^*$, и на первый взгляд нарушает требуемую инвариантность, поскольку оператор $\hat{\mathbf{s}}^*$ не совпадает с $-\hat{\mathbf{s}}$.

Следует, однако, учесть, что волновая функция есть в действительности контрвариантный спинор $\psi^{\lambda\mu\ldots}$, который при комплексном сопряжении переходит в ковариантный $\psi^{\lambda\mu\ldots *}$ (см. § 60). Контравариантным же является спинор $\psi^*_{\lambda\mu\ldots}$. Находя с помощью определений (57,4), (57,5) компоненты $(\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H}\psi)^*$ и выражая их через $\psi^*_{\lambda\mu\ldots}$, убеждаемся в том, что операция обращения времени приводит к уравнению Шредингера для компонент $\psi^*_{\lambda\mu\ldots}$ того же вида, который имело исходное уравнение для компонент $\psi^{\lambda\mu\ldots}$.

§ 112. Движение в однородном магнитном поле

Определим уровни энергии частицы в постоянном однородном магнитном поле (*Л. Д. Ландау*, 1930).

Векторный потенциал однородного поля удобно выбрать здесь не в виде (111,7), а в следующей форме:

$$A_x = -Hy, \qquad A_y = A_z = 0 \tag{112,1}$$