(ср. ниже (121,8)). Подставив сюда (1) и произведя под знаком интеграла усреднение по направлениям **r**, получим

$$\mathbf{H}_{\text{инд}} = -\frac{e^2}{3mc^2}\mathbf{H}\int\frac{\rho}{r}\,dV = \frac{e}{3mc^2}\varphi_e(0)\,\mathbf{H}, \tag{2}$$

где $\varphi_e(0)$ — потенциал поля, создаваемого электронной оболочкой атома в его центре.

В модели Томаса—Ферми $\varphi_e(0) = -1{,}80Z^{4/3}me^3/\hbar^2$ (см. (70,8)), так что

$$\mathbf{H}_{\text{инд}} = -0{,}60\left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^2 Z^{4/3}\mathbf{H} = -3{,}2\cdot10^{-5}Z^{4/3}\mathbf{H}.$$

§ 114. Спин в переменном магнитном поле

Рассмотрим электрически нейтральную частицу, обладающую магнитным моментом и находящуюся в однородном, но переменном (во времени) магнитном поле. Речь может идти как об элементарной (например, нейтрон), так и о сложной (атом) частице. Магнитное поле предполагается настолько слабым, что магнитная энергия частицы в поле мала по сравнению с интервалами между ее уровнями энергии. Тогда можно рассматривать движение частицы как целого при заданном ее внутреннем состоянии.

Пусть $\hat{\mathbf{s}}$ есть оператор «собственного» момента частицы — спина для элементарной частицы или полного момента **J** для атома. Оператор магнитного момента представим в виде (111,1). Гамильтониан для движения нейтральной частицы как целого записывается в форме

$$\hat{H} = -\frac{\mu}{s}\hat{\mathbf{s}}\mathbf{H} \tag{114,1}$$

(выписана лишь та часть гамильтониана, которая зависит от спина).

В однородном поле этот оператор не содержит явно координат [1]). Поэтому волновая функция частицы распадается на произведение координатной и спиновой функций. Из них первая есть просто волновая функция свободного движения; нас интересует ниже только спиновая часть. Покажем, что задача о частице с произвольным моментом s может быть сведена к более простой задаче о движении частицы со спином 1/2 (*E. Majorana*). Для этого достаточно воспользоваться приемом, который мы уже применили в § 57. Именно, вместо одной частицы со спином s

---

[1]) Эти рассуждения можно применить также и к случаю, когда какая-либо частица (в том числе и заряженная) движется в неоднородном магнитном поле, причем ее движение можно считать квазиклассическим. Тогда магнитное поле, меняющееся по мере передвижения частицы вдоль ее траектории, можно рассматривать просто как функцию времени и применять к изменению спиновой волновой функции те же уравнения.

можно формально ввести систему из $2s$ «частиц» со спином $1/2$. Оператор $\hat{\mathbf{s}}$ при этом представляется в виде суммы $\sum \hat{\mathbf{s}}_a$ операторов спина этих «частиц», а волновая функция — в виде произведения $2s$ спиноров первого ранга. Гамильтониан (114,1) распадается тогда на сумму $2s$ независимых гамильтонианов:

$$\hat{H} = \sum_a \hat{H}_a, \quad \hat{H}_a = -\frac{\mu}{s}\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}_a, \tag{114,2}$$

так что движение каждой из $2s$ «частиц» определяется независимо от других. После того как это сделано, достаточно снова ввести компоненты произвольного симметричного спинора ранга $2s$ вместо произведений компонент $2s$ спиноров первого ранга.

Задачи

1. Определить спиновую волновую функцию нейтральной частицы со спином $1/2$, находящейся в однородном магнитном поле, постоянном по направлению, но меняющемся по величине по произвольному закону $H(t)$.

Решение. Волновой функцией будет спинор ψ^ν, удовлетворяющий волновому уравнению

$$i\hbar\dot{\psi}^\nu = -2\mu\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\psi^\nu. \tag{1}$$

Выбирая направление поля в качестве оси z, переписываем это уравнение в спинорных компонентах

$$i\hbar\dot{\psi}^1 = -\mu H\psi^1, \quad i\hbar\dot{\psi}^2 = \mu H\psi^2.$$

Отсюда

$$\psi^1 = c_1 \exp\left(\frac{i\mu}{\hbar}\int H\,dt\right), \quad \psi^2 = c_2 \exp\left(-\frac{i\mu}{\hbar}\int H\,dt\right).$$

Постоянные c_1, c_2 должны быть определены из начальных условий и условия нормировки $|\psi^1|^2 + |\psi^2|^2 = 1$.

2. То же в однородном магнитном поле, постоянном по величине, но с направлением, равномерно вращающимся (с угловой скоростью ω) вокруг оси z, образуя с ней угол θ.

Решение. Магнитное поле имеет составляющие

$$H_x = H\sin\theta\cos\omega t, \quad H_y = H\sin\theta\sin\omega t, \quad H_z = H\cos\theta,$$

и из (1) получим систему уравнений

$$\dot{\psi}^1 = i\omega_H\left(\cos\theta\cdot\psi^1 + \sin\theta\cdot e^{-i\omega t}\psi^2\right),$$
$$\dot{\psi}^2 = i\omega_H\left(\sin\theta\cdot e^{i\omega t}\psi^1 - \cos\theta\cdot\psi^2\right),$$

где $\omega_H = \mu H/\hbar$. Подстановка

$$\psi^1 = e^{-i\omega t/2}\varphi^1, \quad \psi^2 = e^{i\omega t/2}\varphi^2$$

приводит эти уравнения к системе линейных уравнений с постоянными коэффициентами, решая которые, получим

$$\psi^1 = e^{-i\omega t/2}\left(c_1 e^{i\Omega t/2} + c_2 e^{-i\Omega t/2}\right),$$

$$\psi^2 = 2\omega_H \sin\theta\, e^{i\omega t/2}\left[\frac{c_1}{\Omega + \omega + 2\omega_H\cos\theta}e^{i\Omega t/2} - \frac{c_2}{\Omega - \omega - 2\omega_H\cos\theta}e^{-i\Omega t/2}\right],$$

где

$$\Omega = \sqrt{(\omega + 2\omega_H\cos\theta)^2 + 4\omega_H^2\sin^2\theta}.$$