§ 115. Плотность тока в магнитном поле

Выведем квантовомеханическое выражение для плотности тока при движении заряженной частицы в магнитном поле.

Будем исходить из формулы [1])

$$\delta H = -\frac{1}{c}\int \mathbf{j}\delta\mathbf{A}\,dV, \tag{115,1}$$

определяющей изменение функции Гамильтона распределенных в пространстве зарядов при варьировании векторного потенциала [2]). В квантовой механике ее надо применять к среднему значению гамильтониана заряженной частицы:

$$\overline{H} = \int \Psi^*\left[\frac{1}{2m}\left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}\right)^2 - \frac{\mu}{s}\mathbf{H}\hat{\mathbf{s}}\right]\Psi\,dV. \tag{115,2}$$

Произведя варьирование и имея в виду, что $\delta\mathbf{H} = \operatorname{rot}\delta\mathbf{A}$, находим

$$\delta\overline{H} = \int \Psi^*\left[-\frac{e}{2mc}(\hat{\mathbf{p}}\delta\mathbf{A} + \delta\mathbf{A}\hat{\mathbf{p}}) + \frac{e^2}{mc^2}\mathbf{A}\delta\mathbf{A}\right]\Psi\,dV - $$
$$- \frac{\mu}{s}\int \operatorname{rot}\delta\mathbf{A}\cdot\Psi^*\hat{\mathbf{s}}\Psi\,dV. \tag{115,3}$$

Член с $\hat{\mathbf{p}}\delta\mathbf{A}$ преобразуем, интегрируя по частям:

$$\int \Psi^*\hat{\mathbf{p}}\delta\mathbf{A}\Psi\,dV = -i\hbar\int \Psi^*\nabla(\delta\mathbf{A}\Psi)\,dV = i\hbar\int \delta\mathbf{A}\Psi\nabla\Psi^*\,dV$$

(интеграл по бесконечно удаленной поверхности, как обычно, исчезает). Интегрирование по частям производим также и в последнем члене в (115,3), воспользовавшись известной формулой векторного анализа

$$\mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b} = -\operatorname{div}[\mathbf{ab}] + \mathbf{b}\operatorname{rot}\mathbf{a}.$$

Интеграл от члена с div исчезает, так что остается

$$\int \Psi^*\hat{\mathbf{s}}\Psi\operatorname{rot}\delta\mathbf{A}\,dV = \int \delta\mathbf{A}\operatorname{rot}(\Psi^*\hat{\mathbf{s}}\Psi)\,dV.$$

---

[1]) В этом параграфе $\mathbf{j}$ будет обозначать плотность электрического тока: плотность потока частиц, умноженную на их заряд e.

[2]) Функция Лагранжа для заряда в магнитном поле содержит член $\frac{e}{c}\mathbf{vA}$ или, представляя заряд распределенным по пространству, $\frac{1}{c}\int \mathbf{jA}\,dV$. Изменение функции Лагранжа при варьировании $\mathbf{A}$, следовательно, равно

$$\delta L = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}\delta\mathbf{A}\,dV.$$

Бесконечно же малое изменение функции Гамильтона равно взятому с обратным знаком изменению функции Лагранжа (см. I, § 40).

В результате окончательно получаем

$$\delta \bar{H} = -\frac{ie\hbar}{2mc}\int \delta\mathbf{A}\,(\Psi\nabla\Psi^* - \Psi^*\nabla\Psi)\,dV + \\ + \frac{e^2}{mc^2}\int \mathbf{A}\delta\mathbf{A}\Psi\Psi^*\,dV - \frac{\mu}{s}\int \delta\mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,(\Psi^*\hat{\mathbf{s}}\Psi)\,dV.$$

Сравнив с (115,1), находим следующее выражение для плотности тока:

$$\mathbf{j} = \frac{ie\hbar}{2m}[(\nabla\Psi^*)\Psi - \Psi^*\nabla\Psi] - \frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\Psi^*\Psi + \frac{\mu}{s}c\,\mathrm{rot}\,(\Psi^*\hat{\mathbf{s}}\Psi). \quad (115,4)$$

Подчеркнем, что хотя это выражение и содержит в явном виде векторный потенциал, оно, как и следовало, вполне однозначно. В этом легко убедиться прямым вычислением, заметив, что одновременно с калибровочным преобразованием векторного потенциала, согласно (111,8), надо произвести также и преобразование волновой функции согласно (111,9).

Легко проверить также, что ток (115,4) вместе с плотностью зарядов $\rho = e\,|\Psi|^2$ удовлетворяет, как и следовало, уравнению непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{j} = 0.$$

Последний член в (115,4) дает вклад в плотность тока, происходящий от магнитного момента частицы. Он имеет вид $c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{m}$, где

$$\mathbf{m} = \frac{\mu}{s}\Psi^*\hat{\mathbf{s}}\Psi = \Psi^*\hat{\boldsymbol{\mu}}\Psi \quad (115,5)$$

есть пространственная плотность магнитного момента.

Выражение (115,4) представляет собой среднее значение плотности тока. Его можно рассматривать как диагональный матричный элемент некоторого оператора — оператора плотности тока $\hat{\mathbf{j}}$. Этот оператор проще всего записать в представлении вторичного квантования, что сводится к замене Ψ и Ψ^* операторами $\hat{\Psi}$ и $\hat{\Psi}^+$ (причем, согласно общему правилу, Ψ^+ должен стоять в каждом члене слева от Ψ). Можно определить и недиагональные матричные элементы этого оператора:

$$\mathbf{j}_{nm} = \frac{ie\hbar}{2m}[(\nabla\Psi_n^*)\Psi_m - \Psi_n^*\nabla\Psi_m] - \frac{e^2}{mc}\mathbf{A}\Psi_n^*\Psi_m + \frac{\mu}{s}c\,\mathrm{rot}\,(\Psi_n^*\hat{\mathbf{s}}\Psi_m). \quad (115,6)$$