где суммирование в каждом члене производится по всем нуклонам (как протонам, так и нейтронам). Первый член в (116,5) есть скаляр, а второй — ζ-компонента вектора в изопространстве. К ним относятся поэтому те же правила отбора по изотопическому спину, которые имеют место для скаляров и векторов в обычном пространстве по орбитальному моменту (§ 29). Изотопический скаляр допускает лишь переходы без изменения T; ζ-компонента же изотопического вектора имеет матричные элементы лишь для переходов с изменением $\Delta T = 0, \pm 1$, причем дополнительно запрещены переходы с $\Delta T = 0$ между состояниями с $T_\zeta = 0$, т. е. для систем с одинаковым числом нейтронов и протонов (последнее правило следует из того, что матричный элемент перехода с $\Delta T = 0$ пропорционален T_ζ — см. (29,7)).

Так, для дипольного момента ядра роль величин f_p играют произведения $e\mathbf{r}$, а $f_n = 0$. Первый член в (116,5) есть тогда

$$\frac{e}{2}\sum \mathbf{r} = \frac{e}{2m}\sum m\mathbf{r},$$

т. е. пропорционален радиусу-вектору центра инерции и может быть обращен в нуль надлежащим выбором начала координат; другими словами, дипольный момент ядра сводится к ζ-компоненте изотопического вектора.

§ 117. Ядерные силы

Специфические *ядерные силы*, действующие между нуклонами, характеризуются прежде всего своим малым радиусом действия; они убывают экспоненциально на расстояниях $\sim 10^{-13}$ см.

В нерелятивистском пределе можно утверждать, что ядерные силы не зависят от скоростей нуклонов и имеют потенциал (скорости нуклонов в ядре составляют примерно 1/4 от скорости света, см. ниже). Потенциальная энергия U взаимодействия двух нуклонов зависит не только от их взаимного расстояния r, но и от их спинов, причем зависимость от спинов отнюдь не является слабой [1]). Точная зависимость от r могла бы быть установлена, разумеется, лишь последовательной теорией ядерных сил. Характер же зависимости от спинов может быть найден уже из простых соображений, связанных со свойствами операторов спина.

В нашем распоряжении имеется всего три вектора, от которых может зависеть энергия взаимодействия U: единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении радиуса-вектора между двумя нуклонами и их спины $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$. По общим свойствам оператора спина 1/2 всякая функция от него сводится к линейной функции (§ 55). Кроме

[1]) В этом отношении взаимодействие нуклонов существенно отличается от взаимодействия электронов, у которых спин-спиновое взаимодействие имеет лишь релятивистское происхождение и является (в атомах) малым.

того, надо учесть, что произведение $\mathbf{ns}$ является не истинным, а псевдоскаляром (поскольку $\mathbf{n}$ — полярный, а $\mathbf{s}$ — аксиальный вектор). Ввиду этих обстоятельств очевидно, что из трех векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$ можно составить всего две независимые скалярные величины: $\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2$ и $(\mathbf{ns}_1)(\mathbf{ns}_2)$, линейные по каждому из спинов [1]).

Следовательно, в отношении своей зависимости от спинов оператор взаимодействия двух нуклонов может быть представлен в виде суммы трех независимых членов

$$\hat{U}_{\text{обыч}} = U_1(r) + U_2(r)(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2) + U_3(r)[3(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n})(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n}) - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2)], \qquad (117,1)$$

из которых один не зависит, а два зависят от спинов. Третий член написан здесь в таком виде, чтобы обращаться в нуль при усреднении по направлениям $\mathbf{n}$; описываемые этим членом силы обычно называют *тензорными*.

Мы приписали взаимодействию (117,1) индекс «обычное» с целью подчеркнуть тот факт, что этот оператор не меняет зарядового состояния нуклонов. Наряду с этим взаимодействием допустимо и такое, в результате которого протон превращается в нейтрон и наоборот. Оператор этого «обменного» взаимодействия отличается по своему виду от оператора (117,1) наличием оператора перестановки частиц (116,4):

$$\hat{U}_{\text{обм}} = \{U_4(r) + U_5(r)(\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2) + U_6(r)[3(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n})(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n}) - \hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2]\}\hat{P}. \qquad (117,2)$$

Полный оператор взаимодействия дается суммой

$$\hat{U} = \hat{U}_{\text{обыч}} + \hat{U}_{\text{обм}}. \qquad (117,3)$$

Таким образом, взаимодействие двух нуклонов характеризуется шестью различными функциями расстояния между ними. Все эти члены, вообще говоря, одинакового порядка величины [2]).

Спиновые операторы, входящие в (117,1) и (117,2), могут быть выражены через оператор полного спина $\mathbf{S}$. Действительно, возводя в квадрат равенства $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$ и $\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n} = \hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n} + \hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n}$ и учитывая, что $\hat{\mathbf{s}}_1^2 = \hat{\mathbf{s}}_2^2 = 3/4$, $(\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n})^2 = (\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n})^2 = 1/4$ (см. (55,10)), найдем

$$\hat{\mathbf{s}}_1\hat{\mathbf{s}}_2 = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{S}}^2 - \frac{3}{2}\right), \qquad (\hat{\mathbf{s}}_1\mathbf{n})(\hat{\mathbf{s}}_2\mathbf{n}) = \frac{1}{2}\left[(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})^2 - \frac{1}{2}\right]. \qquad (117,4)$$

---

[1]) Здесь подразумевается, что ядерные силы инвариантны по отношению к пространственной инверсии, т. е. не могут содержать псевдокалярных членов. В настоящее время нет экспериментальных данных, которые бы свидетельствовали об обратном.

[2]) Укажем также, что взаимодействие, зависящее от скорости нуклонов, в линейном по скоростям приближении описывается оператором вида

$$[\varphi_1(r) + \varphi_2(r)\hat{P}]\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{S}},$$

где $\mathbf{L} = [\mathbf{rp}]$ — орбитальный момент относительного движения нуклонов ($\mathbf{p}$ — его импульс), а $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2$; этот оператор содержит две функции от r. Члены же вида $\mathbf{pn}$ и $\mathbf{Sn}$ исключаются требованиями инвариантности по отношению к инверсии и к обращению времени.

Оператор $\hat{\mathbf{S}}^2$ коммутативен с оператором $\hat{\mathbf{S}}$, поэтому взаимодействия, описываемые двумя первыми членами в (117,1) и (117,2), сохраняют вектор полного спина системы. Тензорное же взаимодействие содержит оператор $(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})^2$, коммутативный с квадратом $\hat{\mathbf{S}}^2$, но не с самим вектором $\hat{\mathbf{S}}$. В результате оказывается сохраняющейся лишь абсолютная величина полного спина, но не его направление.

Полный спин S системы двух нуклонов может иметь значения 0 и 1. Такие же два значения может иметь ее полный изотопический спин T. Поэтому все возможные состояния этой системы распадаются на четыре группы, отличающиеся значениями пары чисел S, T. Для состояний каждой из этих групп имеется свой оператор взаимодействия вида $A(r)$ (при $S=0$) или $A(r) + B(r)[(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})^2 - 2/3]$ (при $S=1$), к которому сводится в этих случаях общий оператор (117,3) (см. задачу 1) [1]).

При заданных значениях S и T состояния системы классифицируются по значениям полного момента J и четности. Как мы знаем, значению $T=0$ соответствуют состояния с симметричными, а значению $T=1$ — с антисимметричными волновыми функциями ψ. Поскольку, с другой стороны, значение S определяет симметрию волновой функции по отношению к спиновым переменным (симметричность при $S=1$ и антисимметричность при $S=0$), то ясно, что заданием пары чисел S, T определится и характер симметрии волновой функции по отношению к пространственным переменным, т. е. четность состояния. Очевидно, что состояния системы с изотопическим спином $T=0$ могут быть лишь четными триплетами ($S=1$) или нечетными синглетами ($S=0$); состояния же системы с изотопическим спином $T=1$ являются нечетными триплетами или четными синглетами.

Поскольку спин, как вектор, не сохраняется, то не должен, вообще говоря, сохраняться и орбитальный момент (сохраняется лишь сумма $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$). Тем не менее абсолютная величина L может оказаться сохраняющейся просто в силу того, что заданные значения J, S и четности (или J, S и T) могут оказаться совместными лишь с одним определенным значением L (напомним, что четность системы двух частиц есть $(-1)^L$). Так, нечетное

---

[1]) Экспериментальные данные о свойствах дейтрона показывают, что при $T=0$, $S=1$ взаимодействие нуклонов содержит сильное притяжение с глубокой потенциальной ямой (наличие тензорных сил делает затруднительным формулировку этого факта в виде свойств функций $A(r)$, $B(r)$); кроме того, можно утверждать (исходя из знака наблюдаемого квадрупольного момента дейтрона), что в этом состоянии коэффициент $B(r)$ в тензорных силах отрицателен. Из данных о рассеянии нуклонов следует, что при $T=1$, $S=0$ тоже имеется притяжение, но более слабое и не приводящее, в частности, к возникновению устойчивой системы двух частиц.

состояние с $S = 1$, $J = 1$ может иметь лишь $L = 1$, т. е. являться состоянием ${}^3P_1$. В других же случаях заданным значениям J, S и четности могут соответствовать два различных значения L, так что L не сохраняется. Так, в нечетном состоянии с $S = 1$, $J = 2$ может быть $L = 1$ и $L = 3$, т. е. такое состояние является суперпозицией ${}^3P_2 + {}^3F_2$.

Таким образом, мы приходим к следующим возможным состояниям системы двух нуклонов (индекс $\pm$ указывает четность):
при $T = 1$: ${}^3P_0^-$, ${}^3P_1^-$, $({}^3P_2 + {}^3F_2)^-$, ${}^3F_3^-$, ...; ${}^1S_0^+$, ${}^1D_2^+$, ${}^1G_4^+$, ...,
при $T = 0$: $({}^3S_1 + {}^3D_1)^+$, ${}^3D_2^+$, $({}^3D_3 + {}^3G_3)^+$, ...; ${}^1P_1^-$, ${}^1F_3^-$, ...

Ядерные силы являются, вообще говоря, не аддитивными. Это значит, что взаимодействие в системе из более чем двух нуклонов не сводится к сумме взаимодействий всех пар частиц между собой. По-видимому, однако, тройные и т. д. взаимодействия играют относительно малую роль по сравнению с парными и потому при рассмотрении свойств сложных ядер можно в значительной мере основываться на свойствах парных взаимодействий.

Опытные данные о ядрах показывают, что по мере увеличения числа частиц A система нуклонов начинает вести себя как макроскопическое «ядерное вещество», объем и энергия которого растут пропорционально A (с точностью до эффектов, связанных с кулоновским взаимодействием протонов и наличием свободной поверхности ядра). Свойство ядерных сил, с которым связано это явление, называют свойством их *насыщения*.

Существование этого свойства накладывает определенные ограничения на функции U_1, ..., U_6, определяющие парные взаимодействия нуклонов. Представим себе, что все частицы сконцентрированы в объеме размерами порядка радиуса действия ядерных сил; тогда все пары частиц взаимодействуют друг с другом. Если при этом существует такая конфигурация каких-либо нуклонов (и такая ориентация их спинов), при которой между всеми парами действуют силы притяжения, то потенциальная энергия такой системы была бы отрицательной величиной, пропорциональной A^2. Кинетическая же энергия такой системы есть положительная величина, пропорциональная $A^{5/3}$, т. е. меньшей степени A [1]). Ясно, что в таких условиях совокупность достаточно большого числа нуклонов действительно концентрировалась бы в не зависящем от A малом объеме, т. е. не создавала бы ядерного вещества. Поэтому условие насыщения ядерных сил должно выражаться условиями отсутствия конфигураций, приводящих к про-

[1]) Плотность n, с которой частицы сконцентрированы в заданном объеме, пропорциональна их числу A, а кинетическая энергия каждой из них пропорциональна при этом $n^{2/3}$ (ср. (70,1)). Поэтому полная кинетическая энергия $\sim AA^{2/3}$.

порциональной A^2 отрицательной энергии взаимодействия (см. задачу 2).

Пропорциональность объема ядерного вещества числу частиц выражается соотношением вида

$$R = r_0 A^{1/3}, \tag{117,5}$$

связывающим радиус ядра R с числом частиц A в нем. Опытные данные (о рассеянии электронов на ядрах) приводят к значению $r_0 \approx 1{,}1 \cdot 10^{-13}$ см.

Определим предельный импульс нуклонов в ядерном веществе (ср. § 70). Объем фазового пространства, соответствующий частицам, находящимся в единице объема физического пространства и обладающим импульсами $p \leqslant p_0$, равен $4\pi p_0^3/3$. Разделив его на $(2\pi\hbar)^3$, получим число «клеток», в каждой из которых может находиться одновременно по два протона и два нейтрона. Положив число протонов равным числу нейтронов, получим

$$4\,\frac{4\pi}{3}\left(\frac{p_0}{2\pi\hbar}\right)^3 = \frac{A}{V}$$

(где V — объем ядра). Подставив сюда (117,5), получим

$$p_0 = \left(\frac{3\pi^2 A}{2V}\right)^{1/3}\hbar = \frac{(9\pi)^{1/3}\hbar}{2r_0} = 1{,}4 \cdot 10^{-14}\ \text{г}\cdot\text{см}\cdot\text{с}^{-1}.$$

Соответствующая энергия $p_0^2/2m_p$ (m_p — масса нуклона) составляет ~ 30 МэВ, а скорость $p_0/m_p \approx c/4$.

Задачи

1. Найти операторы взаимодействия двух нуклонов в состояниях с определенными значениями S и T.

Решение. Искомые операторы $\hat{U}_{ST}$ получаются из общего выражения (117,1)—(117,3) при учете соотношений (116,3) и (117,4):

$$\hat{U}_{00} = U_1 - \frac{3}{4}U_2 + U_4 - \frac{3}{4}U_5,$$

$$\hat{U}_{01} = U_1 - \frac{3}{4}U_2 - U_4 + \frac{3}{4}U_5,$$

$$\hat{U}_{10} = U_1 + \frac{1}{4}U_2 + U_4 + \frac{1}{4}U_5 + \frac{1}{2}(U_3 + U_6)\,[3\,(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})^2 - 2],$$

$$\hat{U}_{11} = U_1 + \frac{1}{4}U_2 - U_4 - \frac{1}{4}U_5 + \frac{1}{2}(U_3 - U_6)\,[3\,(\hat{\mathbf{S}}\mathbf{n})^2 - 2].$$

2. Найти условия насыщения ядерных сил, предполагая тензорные силы отсутствующими; радиусы действия всех остальных типов сил предполагаются одинаковыми.

Решение. Рассмотрим некоторые крайние случаи (между которыми находятся все другие возможные случаи) для состояния системы из A нуклонов и напишем условия того, чтобы энергия взаимодействия «средней» пары нуклонов в этой системе была положительной.

Пусть полный спин и изотопический спин ядра имеют наибольшие возможные значения: $S_{\text{яд}} = T_{\text{яд}} = A/2$ (все частицы в системе — протоны с параллельными спинами). Тогда для каждой пары нуклонов имеем $S = T = 1$, и мы получаем условие

$$U_{11} > 0. \tag{1}$$

Пусть теперь $T_{\text{яд}} = A/2$, $S_{\text{яд}} = 0$. Тогда для каждой пары нуклонов $T = 1$, а для отдельного нуклона равно нулю среднее значение s_z. Последнее означает, что нуклон с равной вероятностью может иметь $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$; в этих условиях вероятности паре нуклонов находиться в состояниях с $S = 0$ или $S = 1$ равны соответственно $1/4$ и $3/4$ (они пропорциональны числу $2S + 1$ возможных значений S_z). Поэтому условие положительности средней энергии пары

$$\frac{1}{4} U_{01} + \frac{3}{4} U_{11} > 0. \tag{2}$$

Аналогично, рассмотрение состояния с $T_{\text{яд}} = 0$, $S_{\text{яд}} = A/2$ приводит к условию

$$\frac{1}{4} U_{10} + \frac{3}{4} U_{11} > 0. \tag{3}$$

В состоянии с $T_{\text{яд}} = S_{\text{яд}} = 0$ вероятность паре нуклонов иметь $S = T = 1$ равна $3/4 \cdot 3/4$, вероятность иметь $T = 1$, $S = 0$ равна $3/4 \cdot 1/4$, и т. д. Отсюда находим условие

$$\frac{9}{16} U_{11} + \frac{3}{16} (U_{10} + U_{01}) + \frac{1}{16} U_{00} > 0. \tag{4}$$

Наконец, пусть система состоит из $A/2$ протонов и $A/2$ нейтронов, причем спины всех протонов параллельны друг другу и антипараллельны спинам всех нейтронов. Отдельный нуклон с равной вероятностью может оказаться p или n, т. е. иметь $\tau_\zeta = 1/2$ или $\tau_\zeta = -1/2$; вероятность паре нуклонов иметь $T = 0$ равна $1/4$. При этом один из нуклонов пары есть p, а другой — n; поэтому будет $S_z = 0$. Это значение S_z может с равной вероятностью осуществляться из состояний с $S = 0$ или $S = 1$. Следовательно, вероятности паре находиться в состоянии с $T = 0$, $S = 0$ или $T = 0$, $S = 1$ равны по $1/4 \cdot 1/2 = 1/8$. Такова же вероятность состояния с $T = 1$, $S = 0$, а остальные $5/8$ приходятся на состояние с $T = S = 1$. Учитывая все это, получим условие

$$\frac{1}{8} (U_{00} + U_{01} + U_{10}) + \frac{5}{8} U_{11} > 0. \tag{5}$$

Неравенства (1)—(5) и представляют собой искомую систему условий насыщения ядерных сил.

§ 118. Модель оболочек

Многие свойства ядер могут быть хорошо описаны с помощью *модели оболочек*, по своим основным представлениям аналогичной тому, как описывается строение электронной оболочки атома. В этом описании каждый нуклон в ядре рассматривается как движущийся в самосогласованном поле, создаваемом совокупностью всех остальных нуклонов (ввиду малого радиуса действия ядерных сил это поле быстро затухает вне объема, ограниченного «поверхностью» ядра). Соответственно этому, состояние ядра в целом описывается перечислением состояний отдельных нуклонов.