Пусть полный спин и изотопический спин ядра имеют наибольшие возможные значения: $S_{яд} = T_{яд} = A/2$ (все частицы в системе — протоны с параллельными спинами). Тогда для каждой пары нуклонов имеем $S = T = 1$, и мы получаем условие

$$U_{11} > 0. \qquad (1)$$

Пусть теперь $T_{яд} = A/2$, $S_{яд} = 0$. Тогда для каждой пары нуклонов $T = 1$, а для отдельного нуклона равно нулю среднее значение s_z. Последнее означает, что нуклон с равной вероятностью может иметь $s_z = 1/2$ и $s_z = -1/2$; в этих условиях вероятности паре нуклонов находиться в состояниях с $S = 0$ или $S = 1$ равны соответственно 1/4 и 3/4 (они пропорциональны числу $2S + 1$ возможных значений S_z). Поэтому условие положительности средней энергии пары

$$\frac{1}{4} U_{01} + \frac{3}{4} U_{11} > 0. \qquad (2)$$

Аналогично, рассмотрение состояния с $T_{яд} = 0$, $S_{яд} = A/2$ приводит к условию

$$\frac{1}{4} U_{10} + \frac{3}{4} U_{11} > 0. \qquad (3)$$

В состоянии с $T_{яд} = S_{яд} = 0$ вероятность паре нуклонов иметь $S = T = 1$ равна $3/4 \cdot 3/4$, вероятность иметь $T = 1$, $S = 0$ равна $3/4 \cdot 1/4$, и т. д. Отсюда находим условие

$$\frac{9}{16} U_{11} + \frac{3}{16} (U_{10} + U_{01}) + \frac{1}{16} U_{00} > 0. \qquad (4)$$

Наконец, пусть система состоит из $A/2$ протонов и $A/2$ нейтронов, причем спины всех протонов параллельны друг другу и антипараллельны спинам всех нейтронов. Отдельный нуклон с равной вероятностью может оказаться p или n, т. е. иметь $\tau_\zeta = 1/2$ или $\tau_\zeta = -1/2$; вероятность паре нуклонов иметь $T = 0$ равна 1/4. При этом один из нуклонов пары есть p, а другой — n; поэтому будет $S_z = 0$. Это значение S_z может с равной вероятностью осуществляться из состояний с $S = 0$ или $S = 1$. Следовательно, вероятности паре находиться в состоянии с $T = 0$, $S = 0$ или $T = 0$, $S = 1$ равны по $1/4 \cdot 1/2 = 1/8$. Такова же вероятность состояния с $T = 1$, $S = 0$, а остальные 5/8 приходятся на состояние с $T = S = 1$. Учитывая все это, получим условие

$$\frac{1}{8} (U_{00} + U_{01} + U_{10}) + \frac{5}{8} U_{11} > 0. \qquad (5)$$

Неравенства (1)—(5) и представляют собой искомую систему условий насыщения ядерных сил.

§ 118. Модель оболочек

Многие свойства ядер могут быть хорошо описаны с помощью *модели оболочек*, по своим основным представлениям аналогичной тому, как описывается строение электронной оболочки атома. В этом описании каждый нуклон в ядре рассматривается как движущийся в самосогласованном поле, создаваемом совокупностью всех остальных нуклонов (ввиду малого радиуса действия ядерных сил это поле быстро затухает вне объема, ограниченного «поверхностью» ядра). Соответственно этому, состояние ядра в целом описывается перечислением состояний отдельных нуклонов.

Самосогласованное поле сферически-симметрично, причем центром симметрии является, естественно, центр инерции ядра. В связи с этим, однако, возникает следующее затруднение. В методе самосогласованного поля волновая функция системы строится как произведение (или должным образом симметризованная сумма произведений) волновых функций отдельных частиц. Но такая функция не обеспечивает неподвижности центра инерции: хотя вычисленное с ее помощью среднее значение скорости центра инерции и будет равным нулю, но эта же волновая функция приведет к конечным вероятностям отличных от нуля значений скорости [1]).

Это затруднение может быть обойдено путем предварительного исключения движения центра инерции при вычислении любой физической величины с помощью волновых функций $\psi(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_A)$ метода самосогласованного поля. Пусть $f(\mathbf{r}_i, \mathbf{p}_i)$ есть какая-либо физическая величина — функция координат и импульсов нуклонов. Тогда при вычислении ее матричных элементов с помощью функций ψ надо, не меняя $\psi(\mathbf{r}_i)$, произвести замену аргументов функции f согласно

$$\mathbf{r}_i \to \mathbf{r}_i - \mathbf{R}, \qquad \mathbf{p}_i \to \mathbf{p}_i - \frac{\mathbf{P}}{A}, \tag{118,1}$$

где $\mathbf{R}$ — радиус-вектор центра инерции ядра; A — число частиц в нем; $\mathbf{P}$ — импульс его движения как целого; вторая из замен (118,1) соответствует вычитанию $\mathbf{v}_i \to \mathbf{v}_i - \mathbf{V}$ из скоростей нуклонов скорости центра инерции $\mathbf{V}$, с которой импульс $\mathbf{P}$ связан посредством $\mathbf{P} = Am_p\mathbf{V}$ (*S. Gartenhaus*, *C. Schwartz*, 1957).

Так, оператор дипольного момента ядра есть $\mathbf{d} = e\sum \mathbf{r}_p$, где суммирование производится по всем протонам в ядре. Для вычисления же матричных элементов в методе самосогласованного поля этот оператор надо заменить оператором $e\sum(\mathbf{r}_p - \mathbf{R})$. Координаты центра ядра

$$\mathbf{R} = \frac{1}{A}\left(\sum_p \mathbf{r}_p + \sum_n \mathbf{r}_n\right)$$

(суммирования по всем протонам и нейтронам). Поскольку число протонов в ядре есть Z, то окончательно оператор дипольного момента должен быть заменен согласно

$$e\sum_p \mathbf{r}_p \to e\left(1 - \frac{Z}{A}\right)\sum_p \mathbf{r}_p - e\frac{Z}{A}\sum_n \mathbf{r}_n. \tag{118,2}$$

Протоны входят сюда с «эффективным зарядом» $e(1 - Z/A)$, а нейтроны — с «зарядом» — eZ/A. Отметим, что относительный

[1]) В случае электронов в атоме такое затруднение вообще не возникало, так как неподвижность центра инерции автоматически обеспечивалась его совпадением с положением неподвижного тяжелого ядра.

порядок величины возникающих при вычислении дипольного момента поправочных членов оказывается, как видно из (118,2), ~ 1. Поправки же при вычислении магнитных и следующих электрических мультипольных моментов оказываются, как легко увидеть, относительного порядка $\sim 1/A$.

В нерелятивистском приближении взаимодействие нуклона с самосогласованным полем не зависит от спина нуклона: такая зависимость могла бы выражаться лишь членом, пропорциональным $\hat{\mathbf{s}}\mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора нуклона $\mathbf{r}$; но это произведение является не истинным, а псевдоскаляром.

Зависимость энергии нуклона от его спина появляется, однако, при учете релятивистских членов, зависящих от скорости частицы. Наибольшим из них является член, пропорциональный первой степени скорости. Из трех векторов $\mathbf{s}$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$ можно составить истинный скаляр: $[\mathbf{nv}]\,\mathbf{s}$. Поэтому оператор *спин-орбитальной связи* нуклона в ядре имеет вид

$$\hat{V}_{sl} = -\varphi(r)\,[\mathbf{n}\hat{\mathbf{v}}]\,\hat{\mathbf{s}}, \qquad (118,3)$$

где $\varphi(r)$ — некоторая функция от r (ср. также примечание[2] на стр. 556). Поскольку $m_p\,[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ есть орбитальный момент $\hbar\hat{\mathbf{l}}$ частицы, то выражение (118,3) можно написать также и в виде

$$\hat{V}_{sl} = -f(r)\,\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}}, \qquad (118,4)$$

где $f = \hbar\varphi/rm_p$. Подчеркнем, что это взаимодействие — первого порядка по v/c, между тем как спин-орбитальная связь электрона в атоме — эффект второго порядка (§ 72); это отличие связано с тем, что ядерные силы зависят от спина уже в нерелятивистском приближении, в то время как нерелятивистское взаимодействие электронов (кулоновы силы) от спинов не зависит.

Энергия спин-орбитального взаимодействия сосредоточена в основном вблизи поверхности ядра, т. е. функция $f(r)$ убывает в глубь ядра. Действительно, в неограниченном ядерном веществе взаимодействие такого вида вообще не могло бы существовать, как это ясно уже из того, что ввиду однородности такой системы в ней отсутствует какое-либо выделенное направление, вдоль которого мог бы быть направлен вектор $\mathbf{n}$.

Взаимодействие (118,4) приводит к расщеплению уровня нуклона с орбитальным моментом l на два уровня с моментами $j = l \pm 1/2$. Поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{ls} &= \frac{l}{2} \quad \text{при} \quad j = l + \frac{1}{2}, \\ \mathbf{ls} &= -\frac{l+1}{2} \quad \text{при} \quad j = l - \frac{1}{2} \end{aligned} \qquad (118,5)$$

(по формуле (31,3)), то величина этого расщепления

$$\Delta E = E_{l-1/2} - E_{l+1/2} = \overline{f(r)}\left(l + \frac{1}{2}\right). \tag{118,6}$$

Опыт показывает, что уровень $j = l + 1/2$ (параллельные векторы $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$) оказывается глубже уровня с $j = l - 1/2$; это значит, что функция $f(r) > 0$.

Спин-орбитальная связь нуклона в ядре относительно слаба по сравнению с его взаимодействием с самосогласованным полем. В то же время оно оказывается, вообще говоря, большим по сравнению с энергией прямого взаимодействия двух нуклонов в ядре, в результате более быстрого убывания последнего с увеличением атомного веса.

Такое соотношение между энергиями различных взаимодействий приводит к тому, что классификация ядерных уровней должна происходить по типу jj-связи: спины и орбитальные моменты каждого нуклона складываются в полные моменты $\mathbf{j} = \mathbf{l} + \mathbf{s}$, оказывающиеся определенными величинами, поскольку связь между $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ не разрушается прямым взаимодействием частиц между собой (*M. Göppert-Mayer*, 1949; *O. Haxel*, *J. H. Jensen*, *H. E. Suess*, 1949) [1]. Векторы $\mathbf{j}$ отдельных нуклонов складываются затем в суммарный момент ядра $\mathbf{J}$ (который обычно называют просто *спином ядра*, как если бы ядро представляло собой элементарную частицу). В этом отношении классификация ядерных уровней существенно отличается от классификации атомных уровней: в электронной оболочке атома релятивистская спин-орбитальная связь, вообще говоря, мала по сравнению с прямым электрическим и обменным взаимодействиями, и потому классификация уровней происходит обычно по типу LS-связи.

Состояние каждого нуклона в ядре характеризуется его моментом j и его четностью. Хотя каждый из его векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$ в отдельности не сохраняется, но абсолютная величина орбитального момента нуклона тем не менее оказывается определенной. Действительно, момент j может возникнуть либо из состояния с $l = j - 1/2$, либо из состояния с $l = j + 1/2$. При заданном значении j (полуцелом) оба эти состояния имеют разную четность $(-1)^l$, а потому заданием j и четности определяется и квантовое число l.

Состояния нуклонов с одинаковыми l и j принято нумеровать (в порядке увеличения энергии) «главным квантовым числом» n, пробегающим целые значения, начиная с 1 [2]. Различные состояния обозначают символами $1s_{1/2}$, $1p_{1/2}$, $1p_{3/2}$ и т. п., где цифра перед буквой есть главное квантовое число, буквы s, p, d, ...

[1]) Лишь для самых легких ядер связь более близка к LS-типу.

[2]) В отличие от принятого для электронных уровней в атоме условия, по которому число n пробегает значения, начинающиеся с $l + 1$.

указывают обычным образом значение l, а индекс у буквы — значение j. В состоянии с заданными значениями n, l, j может одновременно находиться не более $2j+1$ нейтронов и столько же протонов.

Характеристики состояния ядра в целом (при заданной конфигурации) принято записывать в виде цифры, дающей значение J, с индексом $+$ или $-$, указывающим четность состояния (последняя определяется в модели оболочек четностью или нечетностью алгебраической суммы значений l всех нуклонов).

В результате анализа экспериментальных данных о свойствах ядер оказывается возможным установить ряд закономерностей в расположении ядерных уровней.

Прежде всего оказывается, что энергия уровней нуклона возрастает с увеличением орбитального момента l. Это правило связано с тем, что с увеличением l возрастает центробежная энергия частицы, а потому уменьшается ее энергия связи.

Далее, при заданном значении l уровень с $j = l + 1/2$ (т. е. отвечающий параллельным векторам $\mathbf{l}$ и $\mathbf{s}$) лежит глубже, чем уровень с $j = l - 1/2$. Это правило уже упоминалось выше в связи со свойствами спин-орбитальной связи нуклона в ядре.

Следующее правило относится к изотопическому спину ядер. Напомним, что проекция T_ζ изоспина определяется уже весом и номером ядра (см. (116,1)). При заданном значении T_ζ абсолютная величина изоспина может иметь любые значения, удовлетворяющие неравенству $T \geqslant |T_\zeta|$. Обычно основное состояние ядра имеет наименьшее из этих допустимых значений изоспина, т. е.

$$T_{\text{осн}} = |T_\zeta| = \frac{1}{2}(N-Z). \tag{118,7}$$

Это правило связано с характером взаимодействия нейтрона с протоном, — с тем, что в системе np состояние с изоспином $T = 0$ (состояние нейтрона) имеет бо́льшую энергию связи, чем состояние с $T = 1$ (см. примечание на стр. 557).

Можно также сформулировать некоторые правила, относящиеся к спинам основных состояний ядер. Эти правила определяют, каким образом моменты $\mathbf{j}$ отдельных нуклонов складываются в общий спин ядра. Они являются проявлением стремления протонов и нейтронов, находящихся в ядре в одинаковых состояниях, к попарному (pp и nn) «спариванию» со взаимно противоположными моментами (энергия связи таких пар составляет величину порядка 1—2 МэВ).

Это явление приводит, например, к тому, что если ядро содержит четное число как протонов, так и нейтронов (*четно-четные* ядра), то моменты всех нуклонов попарно компенсируются, так что общий момент ядра обращается в нуль.

Если ядро содержит нечетное число протонов или нейтронов, причем все нуклоны сверх заполненных оболочек находятся в одинаковых состояниях, то обычно полный момент ядра совпадает с моментом одного нуклона — как если бы после спаривания всех возможных пар протонов и нейтронов оставался всего один нуклон с некомпенсированным моментом (полные же моменты заполненных оболочек автоматически равны нулю).

Для *нечетно-нечетных* же ядер (нечетные Z и N) нет какого-либо достаточно общего правила, определяющего спин основного состояния.

Рассмотрение конкретного хода заполнения оболочек в ядрах требовало бы детального анализа имеющихся экспериментальных данных и выходит за рамки этой книги. Мы ограничимся здесь лишь еще некоторыми общими указаниями.

При изучении свойств атомов мы видели, что электронные состояния в них можно разбить на группы такие, что при заполнении каждой из них и переходе к следующей энергия связи электрона падает. Аналогичная ситуация имеет место для ядер, причем нуклонные состояния распределяются по следующим группам:

$$
\begin{array}{llllllr}
1s_{1/2} & & & & & & 2\ \text{нуклона}, \\
1p_{3/2}, & 1p_{1/2} & & & & & 6\ \text{нуклонов}, \\
1d_{5/2}, & 1d_{3/2}, & 2s_{1/2} & & & & 12\ \text{нуклонов}, \\
1f_{7/2}, & 2p_{3/2}, & 1f_{5/2}, & 2p_{1/2}, & 1g_{9/2} & & 30\ \text{нуклонов}, \\
2d_{5/2}, & 1g_{7/2}, & 1h_{11/2}, & 2d_{3/2}, & 3s_{1/2} & & 32\ \text{нуклона}, \\
2f_{7/2}, & 1h_{9/2}, & 1i_{13/2}, & 2f_{5/2}, & 3p_{3/2}, & 3p_{1/2} & 44\ \text{нуклона}.
\end{array}
\qquad (118,8)
$$

Для каждой группы указано полное число протонных или нейтронных вакансий. Соответственно этим числам заполнение какой-либо из групп заканчивается, когда полное число протонов Z или нейтронов N в ядре равно одному из следующих чисел:

$$2,\ 8,\ 20,\ 50,\ 82,\ 126.$$

Эти числа принято называть *магическими* [1]).

Особой устойчивостью обладают так называемые *дважды магические ядра*, в которых как Z, так и N являются магическими числами. По сравнению с близкими к ним ядрами они обладают аномально малым сродством к еще одному нуклону, а их первые возбужденные уровни лежат аномально высоко [2]).

---

[1]) Состояния $1f_{7/2}$ с их 8 вакансиями иногда выделяют в особую группу, в соответствии с тем, что и число 28 в известной степени обладает свойствами магических чисел.

[2]) Таковы ${}^4_2\mathrm{He}_2$, ${}^{16}_{8}\mathrm{O}_8$, ${}^{40}_{20}\mathrm{Ca}_{20}$, ${}^{208}_{82}\mathrm{Pb}_{126}$; ядро ${}^4\mathrm{He}$ вообще неспособно присоединить к себе еще один нуклон (справа внизу указано значение числа N в ядре).

Различные состояния в каждой из групп (118,8) перечислены примерно в порядке их постепенного заполнения в ряду ядер. В действительности при этом заполнении наблюдаются значительные иррегулярности. Кроме того, надо иметь в виду, что в тяжелых ядрах (далеких от магических) расстояния между различными уровнями могут оказаться сравнимыми с «энергией спаривания»; в этих условиях само понятие индивидуальных состояний компонент пары в значительной степени теряет смысл.

Сделаем некоторые замечания по поводу вычисления магнитного момента ядра в модели оболочек. Говоря о магнитном моменте ядра, мы подразумеваем, естественно, магнитный момент, усредненный по движению частиц в ядре. Этот средний магнитный момент $\bar{\mu}$ направлен, очевидно, вдоль спина ядра $\mathbf{J}$, направление которого является единственным выделенным направлением в ядре; поэтому его оператор

$$\hat{\bar{\mu}} = \mu_0 g \hat{\mathbf{J}}, \tag{118,9}$$

где μ_0 — ядерный магнетон, а g — гиромагнитный множитель. Собственное значение проекции этого момента $\bar{\mu}_z = \mu_0 g M_J$. Обычно (ср. (111,1)) под магнитным моментом μ ядра понимают просто максимальное значение его проекции, т. е. $\mu = \mu_0 g J$; с таким обозначением

$$\hat{\bar{\mu}} = \mu \frac{\hat{\mathbf{J}}}{J}. \tag{118,10}$$

Магнитный момент ядра складывается из магнитных моментов нуклонов, находящихся вне заполненных оболочек, поскольку моменты нуклонов в заполненных оболочках взаимно компенсируются. Каждый нуклон создает в ядре магнитный момент, складывающийся из двух частей: спиновой и (в случае протона) орбитальной, т. е. представляющийся суммой $g_s\hat{\mathbf{s}} + g_l\hat{\mathbf{l}}$. (Здесь и ниже мы опускаем множитель μ_0, подразумевая, как это обычно делается, что магнитные моменты измерены в единицах ядерного магнетона.) Орбитальный и спиновый гиромагнитные множители равны: $g_l = 1$, $g_s = 5{,}585$ для протона и $g_l = 0$, $g_s = -3{,}826$ для нейтрона.

После усреднения по движению нуклона в ядре, его магнитный момент становится пропорциональным $\mathbf{j}$; написав его в виде $g_j\mathbf{j}$, имеем

$$g_j\hat{\mathbf{j}} = g_s\hat{\bar{\mathbf{s}}} + g_l\hat{\bar{\mathbf{l}}} = \frac{1}{2}(g_l + g_s)\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}(g_l - g_s)\overline{(\hat{\mathbf{l}} - \hat{\mathbf{s}})}.$$

Умножив это равенство с обеих сторон на $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}$ и переходя к собственным значениям, получим

$$g_j j(j+1) = \frac{1}{2}(g_l + g_s) j(j+1) + \frac{1}{2}(g_l - g_s)[l(l+1) - s(s+1)],$$

а положив здесь $s = 1/2$, $j = l \pm 1/2$, найдем

$$g_j = g_l \pm \frac{g_s - g_l}{2l+1} \quad \text{при} \quad j = l \pm 1/2. \tag{118,11}$$

С указанными выше значениями гиромагнитных множителей это дает для магнитного момента протона $\mu_p = g_j j$:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \left(1 - \frac{2,29}{j+1}\right) j \quad \text{при} \quad j = l - 1/2, \\ \mu_p &= j + 2,29 \qquad\quad \text{при} \quad j = l + 1/2 \end{aligned} \tag{118,12}$$

и для магнитного момента нейтрона

$$\begin{aligned} \mu_n &= \frac{1,91}{j+1} j \quad \text{при} \quad j = l - 1/2, \\ \mu_n &= -1,91 \quad \text{при} \quad j = l + 1/2 \end{aligned} \tag{118,13}$$

(*T. Schmidt*, 1937).

Если вне заполненных оболочек имеется всего один нуклон, формулы (118,12) или (118,13) непосредственно дают магнитный момент ядра. Для двух нуклонов сложение их магнитных моментов тоже производится элементарно (см. задачу 1). В случае большего числа нуклонов усреднение магнитного момента должно производиться с помощью волновой функции системы, должным образом составленной из индивидуальных волновых функций нуклонов. Задание нуклонной конфигурации и состояния ядра в целом позволяют сделать это однозначным образом в тех случаях, когда данной конфигурации может соответствовать всего одно состояние системы с заданными значениями J и T (см., например, задачу 3); в противном случае состояние ядра представляет собой смесь нескольких независимых состояний (с одинаковыми J, T) и, вообще говоря, остаются неизвестными коэффициенты в линейной комбинации, дающей волновую функцию ядра [1]).

Наконец укажем, что наличие спин-орбитальной связи нуклонов в ядре приводит к появлению у протонов в ядре некоторого дополнительного (по отношению к (118,9)) магнитного момента (*M. Göppert-Mayer, J. H. Jensen*, 1952). Дело в том, что при явной зависимости оператора взаимодействия от скорости частицы переход к случаю наличия внешнего поля совершается путем замены оператора импульса согласно $\hat{\mathbf{p}} \to \hat{\mathbf{p}} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$. Производя эту замену в (118,3) и воспользовавшись выражением (111,7) для

[1]) Отметим, однако, что точность «одночастичной» схемы вычисления магнитных моментов ядер фактически оказывается невысокой. Пары значений (118,12) и (118,13) оказываются скорее верхним и нижним пределами, чем точными значениями моментов.

векторного потенциала, найдем, что в гамильтониане протона появляется дополнительный член

$$\varphi(r)\frac{e}{cm_p}[\mathbf{nA}]\hat{\mathbf{s}} = f(r)\frac{e}{2c\hbar}[\mathbf{r}[\mathbf{Hr}]]\hat{\mathbf{s}} = f(r)\frac{e}{2c\hbar}[\mathbf{r}[\hat{\mathbf{s}}\mathbf{r}]]\,\mathbf{H}.$$

Такой член эквивалентен возникновению дополнительного магнитного момента с оператором

$$\hat{\mu}_{\text{доп}} = -\frac{e}{2c\hbar}f(r)[\mathbf{r}[\hat{\mathbf{s}}\mathbf{r}]] = -\frac{e}{2c\hbar}r^2 f(r)\{\hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{s}}\mathbf{n})\,\mathbf{n}\}. \qquad (118{,}14)$$

Задачи

1. Определить магнитный момент системы двух нуклонов (с полным механическим моментом $\mathbf{J} = \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2$), выразив его через магнитные моменты μ_1 и μ_2 каждого из нуклонов.

Решение. Аналогично выводу формулы (118,11) получим

$$\frac{\mu}{J} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{j_1} + \frac{\mu_2}{j_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{j_1} - \frac{\mu_2}{j_2}\right)\frac{(j_1 - j_2)(j_1 + j_2 + 1)}{J(J+1)}.$$

2. Найти возможные состояния системы трех нуклонов с моментами $j = 3/2$ (и одинаковыми главными квантовыми числами).

Решение. Поступаем аналогично тому, как было сделано в § 67 при нахождении возможных состояний системы эквивалентных электронов. Каждый нуклон может находиться в одном из восьми состояний со следующими парами значений чисел (m_j, τ_ζ):

$$\begin{matrix}(3/2,\ 1/2), & (1/2,\ 1/2), & (-1/2,\ 1/2), & (-3/2,\ 1/2),\\ (3/2,\ -1/2), & (1/2,\ -1/2), & (-1/2,\ -1/2), & (-3/2,\ -1/2).\end{matrix}$$

Комбинируя эти состояния по три различных, найдем следующие пары значений (M_J, T_ζ) для системы трех нуклонов:

$$(7/2,\ 1/2),\quad 2\,(5/2,\ 1/2),\quad (3/2,\ 3/2),\quad 4\,(3/2,\ 1/2),$$
$$(1/2,\ 3/2),\quad 5\,(1/2,\ 1/2)$$

(цифра перед скобками указывает число соответствующих состояний; состояний с отрицательными значениями M_J, T_ζ можно не выписывать). Им соответствуют состояния системы со следующими значениями чисел (J, T):

$$(7/2,\ 1/2),\quad (5/2,\ 1/2)\quad (3/2,\ 3/2),\quad (3/2,\ 1/2),\quad (1/2,\ 1/2).$$

3. Определить магнитный момент основного состояния конфигурации двух нейтронов и одного протона в состояниях $p_{3/2}$ (с одинаковыми n) с учетом изотопической инвариантности[1]).

Решение. Основное состояние такой конфигурации имеет $J = 3/2$, а по указанному в тексте правилу его изоспин имеет наименьшее возможное значение $T = |T_\zeta| = 1/2$.

Определим волновую функцию системы, соответствующую наибольшему возможному значению $M_J = 3/2$. Это значение M_J может быть осуществлено (с учетом требований принципа Паули для двух одинаковых нуклонов) следующими тройками значений m_j соответственно для нуклонов p, n, n:

$$(3/2,\ 3/2,\ -3/2),\quad (3/2,\ 1/2,\ -1/2),\quad (1/2,\ 3/2,\ -1/2),\quad (1/2,\ 3/2,\ 1/2).$$

[1]) Такую конфигурацию (сверх заполненной оболочки $(1s_{1/2})^4$) имеет ядро ^{7}Li.

Поэтому искомая волновая функция $\psi_{TT_\zeta}^{JM_J}$ является линейной комбинацией вида

$$\Psi^{3/2}_{1/2\ -1/2} = a\left[\psi^{3/2}_{1/2}\psi^{3/2}_{-1/2}\psi^{-3/2}_{-1/2}\right] + b\left[\psi^{3/2}_{1/2}\psi^{1/2}_{-1/2}\psi^{-1/2}_{-1/2}\right] +$$
$$+ c\left[\psi^{3/2}_{-1/2}\psi^{1/2}_{1/2}\psi^{-1/2}_{-1/2}\right] + d\left[\psi^{3/2}_{-1/2}\psi^{1/2}_{-1/2}\psi^{-1/2}_{1/2}\right], \qquad (1)$$

где $[\cdots]$ обозначает нормированное антисимметризованное произведение (т. е. определитель вида (61,5)) индивидуальных волновых функций $\psi^{m_j}_{\tau_\zeta}$ нуклонов.

Функция (1) должна обращаться в нуль при воздействии на нее операторов

$$\hat{T}_- = \sum_{i=1}^{3} \hat{\tau}_-^{(i)} \quad \text{и} \quad \hat{J}_+ = \sum_{i=1}^{3} \hat{j}_+^{(i)}$$

(ср. задачу к § 67). Операторы $\hat{\tau}_-^{(i)}$ превращают протонную функцию i-го нуклона в нейтронную (а нейтронную функцию — в нуль). Легко видеть поэтому, что оператор $\hat{T}_-$ обращает первый член в (1) в определитель с двумя одинаковыми строками, т. е. в нуль, а определители в трех остальных членах становятся одинаковыми; поэтому получаем условие $b + c + d = 0$. Далее, для отдельного нуклона с моментом $j = 3/2$ и различными значениями m_j имеем (согласно (27,12))

$$\hat{j}_+\psi^{3/2} = 0, \qquad \hat{j}_+\psi^{1/2} = \sqrt{3}\,\psi^{3/2}, \qquad \hat{j}_+\psi^{-1/2} = 2\psi^{1/2}, \qquad \hat{j}_+\psi^{-3/2} = \sqrt{3}\,\psi^{-1/2}.$$

Отсюда легко найти, что при воздействии оператора $\hat{J}_+$ на функцию (1) получается

$$\hat{J}_+\Psi^{3/2}_{1/2\ -1/2} = \sqrt{3}\,(a + b - c)\left[\psi^{3/2}_{1/2}\psi^{3/2}_{-1/2}\psi^{-1/2}_{-1/2}\right] +$$
$$+ 2\,(c - d)\left[\psi^{3/2}_{-1/2}\psi^{1/2}_{1/2}\psi^{1/2}_{-1/2}\right]$$

(изменение знака некоторых членов связано с перестановкой строк определителя). Условие равенства этого выражения нулю дает

$$a + b - c = 0, \qquad c - d = 0.$$

Вместе с условием нормировки функции (1) полученные соотношения дают

$$a = \frac{3}{\sqrt{15}}, \qquad b = -\frac{2}{\sqrt{15}}, \qquad c = d = \frac{1}{\sqrt{15}}.$$

Учитывая, что среднее значение проекции магнитного момента протона (или нейтрона) в состоянии с данным m_j есть $\mu_p m_j/j$ (или $\mu_n m_j/j$), найдем, что среднее значение момента системы, вычисленное с помощью волновой функции (1), равно

$$\mu = \bar{\mu}_z = \frac{9}{15}\mu_p + \frac{4}{15}\mu_p + \frac{1}{15}\left(\frac{1}{3}\mu_p + \frac{2}{3}\mu_n\right) +$$
$$+ \frac{1}{15}\left(-\frac{1}{3}\mu_p + \frac{4}{3}\mu_n\right) = \frac{1}{15}(13\mu_p + 2\mu_n).$$

По формулам (118,12), (118,13) найдем, что для нуклона в состоянии $p_{3/2}$: $\mu_n = -1{,}91$, $\mu_p = 3{,}79$. В результате $\mu = 3{,}03$.

4. Определить магнитный момент ядра, в котором все нуклоны вне заполненных оболочек находятся в одинаковых состояниях, причем число протонов равно числу нейтронов.

Решение. Поскольку при $N = Z$ проекция изоспина $T_\zeta = 0$, то диагональные матричные элементы имеет только изотопически-скалярная часть оператора

$$\hat{\mu} = \sum_n g_n \hat{\mathbf{j}}_n + \sum_p g_p \hat{\mathbf{j}}_p$$

(см. конец § 116). Выделяя эту часть в соответствии с формулой (116,5), найдем, что она равна

$$\frac{1}{2}(g_n + g_p) \sum_{n,p} \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(g_n + g_p)\hat{\mathbf{J}}.$$

Поэтому полный средний магнитный момент ядра равен $\frac{1}{2}(g_n + g_p) J$.

5. Вычислить дополнительный магнитный момент нуклона с механическим моментом j, выразив его через величину спин-орбитального расщепления (118,6) (*M. Göppert-Mayer, J. H. Jensen*, 1952).

Решение. Усреднение угловой части оператора (118,14) (выражение в фигурных скобках в (118,14); обозначим его как $\hat{\sigma}$) производится по формуле, полученной в задаче к § 29, и дает

$$\bar{\hat{\sigma}} \equiv \overline{\hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{s}}\mathbf{n})\,\mathbf{n}} = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{s}} + \frac{(\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{l}})\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{l}}(\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{l}}) - \frac{2}{3} l(l+1)\hat{\mathbf{s}}}{(2l-1)(2l+3)}. \qquad (2)$$

С другой стороны, после полного усреднения по движению нуклона среднее значение σ может быть направлено лишь по $\mathbf{j}$, т. е. $\bar{\bar{\sigma}} = a\hat{\mathbf{j}}$; отсюда $a = (\bar{\bar{\sigma}}\hat{\mathbf{j}})/\mathbf{j}^2$. Произведя проецирование вектора (2) на $\mathbf{j}$ (причем надо учесть, что оператор $\hat{\mathbf{j}}$ коммутирует с $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}})$) и переходя к собственным значениям величин $\mathbf{ls}$, $\mathbf{l}^2$ и т. п., получим, после простого вычисления, следующее выражение для дополнительного магнитного момента нуклона (в единицах ядерного магнетона):

$$\mu_{\text{доп}} = \mp \overline{f(r)}\, \frac{m_p R^2}{\hbar^2} \frac{2j+1}{4(j+1)} \quad \text{при} \quad j = l \pm 1/2 \qquad (3)$$

(m_p — масса нуклона; R — радиус ядра; при усреднении $r^2 f$ множитель r^2 заменен на R^2 ввиду быстрого убывания $f(r)$ в глубь ядра). Среднее значение $\bar{f}$ в (3) может быть выражено через спин-орбитальное расщепление согласно (118,6).

§ 119. Несферические ядра

Система частиц, движущихся в сферически-симметричном поле, не может иметь вращательного спектра энергий; в квантовой механике понятие вращения для такой системы вообще не имеет никакого смысла. Это относится и к рассмотренной в предыдущем параграфе оболочечной модели ядра со сферически-симметричным самосогласованным полем.

Разделение энергии системы на внутреннюю и вращательную части в квантовой механике вообще не имеет строгого смысла. Оно может иметь лишь приближенный характер и возможно в тех случаях, когда по тем или иным физическим причинам является