Решение. Поскольку при $N = Z$ проекция изоспина $T_\zeta = 0$, то диагональные матричные элементы имеет только изотопически-скалярная часть оператора

$$\hat{\mu} = \sum_n g_n \hat{\mathbf{j}}_n + \sum_p g_p \hat{\mathbf{j}}_p$$

(см. конец § 116). Выделяя эту часть в соответствии с формулой (116,5), найдем, что она равна

$$\frac{1}{2}(g_n + g_p) \sum_{n,\,p} \hat{\mathbf{j}} = \frac{1}{2}(g_n + g_p)\hat{\mathbf{J}}.$$

Поэтому полный средний магнитный момент ядра равен $\frac{1}{2}(g_n + g_p) J$.

5. Вычислить дополнительный магнитный момент нуклона с механическим моментом j, выразив его через величину спин-орбитального расщепления (118,6) (*M. Göppert-Mayer, J. H. Jensen*, 1952).

Решение. Усреднение угловой части оператора (118,14) (выражение в фигурных скобках в (118,14); обозначим его как $\hat{\sigma}$) производится по формуле, полученной в задаче к § 29, и дает

$$\bar{\hat{\sigma}} \equiv \overline{\hat{\mathbf{s}} - (\hat{\mathbf{s}}\mathbf{n})\,\mathbf{n}} = \frac{2}{3}\hat{\mathbf{s}} + \frac{(\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{l}})\,\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{l}}\,(\hat{\mathbf{s}}\hat{\mathbf{l}}) - \frac{2}{3}\,l\,(l+1)\,\hat{\mathbf{s}}}{(2l-1)(2l+3)}. \qquad (2)$$

С другой стороны, после полного усреднения по движению нуклона среднее значение σ может быть направлено лишь по $\mathbf{j}$, т. е. $\bar{\bar{\hat{\sigma}}} = a\hat{\mathbf{j}}$; отсюда $a = (\bar{\bar{\hat{\sigma}}}\hat{\mathbf{j}})/\mathbf{j}^2$. Произведя проецирование вектора (2) на $\mathbf{j}$ (причем надо учесть, что оператор $\hat{\mathbf{j}}$ коммутирует с $(\hat{\mathbf{l}}\hat{\mathbf{s}})$) и переходя к собственным значениям величин $\mathbf{ls}$, $\mathbf{l}^2$ и т. п., получим, после простого вычисления, следующее выражение для дополнительного магнитного момента нуклона (в единицах ядерного магнетона):

$$\mu_{\text{доп}} = \mp\overline{f(r)}\,\frac{m_p R^2}{\hbar^2}\,\frac{2j+1}{4(j+1)} \quad \text{при} \quad j = l \pm 1/2 \qquad (3)$$

(m_p — масса нуклона; R — радиус ядра; при усреднении $r^2 f$ множитель r^2 заменен на R^2 ввиду быстрого убывания $f(r)$ в глубь ядра). Среднее значение $\bar{f}$ в (3) может быть выражено через спин-орбитальное расщепление согласно (118,6).

§ 119. Несферические ядра

Система частиц, движущихся в сферически-симметричном поле, не может иметь вращательного спектра энергий; в квантовой механике понятие вращения для такой системы вообще не имеет никакого смысла. Это относится и к рассмотренной в предыдущем параграфе оболочечной модели ядра со сферически-симметричным самосогласованным полем.

Разделение энергии системы на внутреннюю и вращательную части в квантовой механике вообще не имеет строгого смысла. Оно может иметь лишь приближенный характер и возможно в тех случаях, когда по тем или иным физическим причинам является хорошим приближением рассмотрение системы как совокупности частиц, движущихся в заданном поле, не обладающем сферической симметрией. Вращательная структура уровней появляется тогда как результат учета возможности вращения указанного поля по отношению к фиксированной системе координат. С таким случаем мы имели дело, например, в молекулах, электронные термы которых можно определять как уровни энергии системы электронов, движущихся в заданном поле фиксированных ядер.

Опыт показывает, что большинство ядер действительно не обладает вращательной структурой. Это означает, что хорошим приближением для них является сферически-симметричное самосогласованное поле, т. е. ядра обладают (с точностью до квантовых флуктуаций) сферической формой.

Существует, однако, и такая категория ядер, которые обладают энергетическим спектром вращательного типа (сюда относятся ядра в интервалах атомных весов примерно $150 < A < 190$ и $A > 220$). Это их свойство означает, что приближение сферически-симметричного самосогласованного поля для них совершенно непригодно. Самосогласованное поле для этих ядер должно в принципе искаться без каких-либо предварительных предположений о характере его симметрии с тем, чтобы форма ядра определилась также «самосогласованным» образом. Опыт показывает, что правильной моделью для ядер этой категории оказывается самосогласованное поле, имеющее ось симметрии и перпендикулярную к ней плоскость симметрии (т. е. имеющие симметрию эллипсоида вращения). Представление о несферических ядрах наиболее полно было разработано в работах *О. Бора* и *Моттельсона* (*A. Bohr, B. R. Mottelson*, 1952—1953).

Подчеркнем, что мы имеем дело с двумя качественно различными категориями ядер. Это проявляется, в частности, в том, что ядра оказываются либо сферическими, либо несферическими с отнюдь не малой «степенью несферичности».

Возникновению несферичности способствует наличие в ядре незаполненных оболочек; существенную роль в этом явлении играет, по-видимому, также явление спаривания нуклонов. Напротив, замкнутость оболочек способствует сферичности ядра. Характерным в этом смысле является дважды магическое ядро $^{208}_{82}\mathrm{Pb}$; в силу резко выраженной замкнутости его нуклонной конфигурации это ядро (а также и близкие к нему ядра) является сферическим, что и приводит к появлению разрыва в ряду несферических тяжелых ядер.

Уровни энергии несферического ядра представляются суммой двух частей: уровней «неподвижного» ядра и энергии его вращения как целого. У четно-четных ядер интервалы вращательной структуры уровней оказываются при этом малыми по сравнению с расстояниями между уровнями «неподвижного» ядра.

Классификация уровней несферического ядра во многом аналогична классификации уровней двухатомной молекулы (состоящей из одинаковых атомов), поскольку симметрия поля, в котором движутся частицы (нуклоны или электроны) в обоих случаях одинакова. Мы сможем поэтому непосредственно воспользоваться рядом результатов, полученных в гл. XI [1]).

Остановимся сначала на классификации состояний «неподвижного ядра». В поле с аксиальной симметрией сохраняется лишь проекция момента на ось симметрии. Поэтому каждое состояние ядра характеризуется прежде всего величиной Ω проекции его полного момента [2]), которая может иметь как целые, так и полуцелые значения. В зависимости от поведения волновой функции при изменении знака координат всех нуклонов (по отношению к центру ядра) уровни делятся на четные (g) и нечетные (u).

Кроме того, при $\Omega = 0$ дополнительно различаются положительные и отрицательные состояния — в зависимости от поведения волновой функции при отражении в плоскости, проходящей через ось ядра (см. § 78).

Основные состояния четно-четных несферических ядер являются состояниями 0_g^+ (цифра указывает значение Ω), соответствующими равному нулю моменту и наиболее высокой симметрии волновой функции; это обстоятельство является результатом попарного спаривания всех нейтронов и всех протонов. Если же ядро содержит нечетное число протонов или нейтронов, то в нем можно рассматривать состояние «нечетного» нуклона в самосогласованном поле четно-четного «остова» ядра.

При этом значение Ω определяется проекцией ω момента этого нуклона. Аналогично, в нечетно-нечетном ядре значение Ω складывается из проекций моментов нечетного нейтрона и нечетного протона ($\Omega = |\omega_p \pm \omega_n|$).

Следует в то же время подчеркнуть, что нельзя говорить об определенных значениях проекций орбитального момента и спина нуклона. Дело в том, что хотя спин-орбитальная связь нуклона и мала по сравнению с энергией его взаимодействия с самосогласованным полем остова, но она не мала по сравнению с расстояниями между соседними уровнями энергии нуклона в этом

[1]) Подчеркнем, что речь идет об аналогии с классификацией уровней именно двухатомной молекулы, а не симметричного волчка. Для системы частиц, движущихся в аксиально-симметричном поле, понятие вращения вокруг оси поля не имеет смысла так же, как не имеет смысла понятие вращения вокруг любой оси для системы в центрально-симметричном поле.

[2]) По определению, $\Omega \geqslant 0$ (подобно положительности квантового числа Λ в двухатомных молекулах). Напомним, что отрицательные значения числа Ω в случае двухатомных молекул могли возникать лишь в связи с тем, что Ω определялось как сумма $\Lambda + \Sigma$, причем Σ могло быть (в зависимости от относительных направлений орбитального момента и спина) как положительным, так и отрицательным.

поле; между тем именно последнее условие требовалось бы для применимости теории возмущений, позволившей бы в хорошем приближении рассматривать раздельно орбитальный момент и спин нуклона [1]).

Перейдем к вращательной структуре уровней несферического ядра. Интервалы этой структуры малы по сравнению со спин-орбитальным взаимодействием нуклонов в ядре; такая ситуация соответствует случаю *a* теории двухатомных молекул (§ 83).

Полный момент вращающегося ядра **J**, разумеется, сохраняется. При заданном Ω его величина J пробегает значения, начинающиеся от Ω:

$$J = \Omega, \quad \Omega + 1, \quad \Omega + 2, \ldots \tag{119,1}$$

(см. (83,2)). Дополнительное ограничение возможных значений J имеет место для ядер с $\Omega = 0$: в состояниях 0_g^+ и 0_u^- число J пробегает лишь четные значения, а в состояниях 0_g^- и 0_u^+ — нечетные значения (см. § 86). В частности, во вращательных уровнях основного терма четно-четных ядер (0_g^+) число J пробегает значения 0, 2, 4, ...

Вращательная энергия ядра определяется формулой

$$E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1), \tag{119,2}$$

где I — момент инерции ядра (относительно оси, перпендикулярной к его оси симметрии); эта формула соответствует аналогичному выражению теории двухатомных молекул (зависящий от J член в (83,6)). Наиболее низкому уровню соответствует наименьшее возможное значение J, т. е. $J = \Omega$.

В силу (119,2) вращательная структура уровней характеризуется определенными правилами интервалов, не зависящими (при заданном Ω) от других характеристик уровня. Так, компоненты вращательной структуры основного терма четно-четного ядра (с $J = 2, 4, 6, 8, \ldots$) отстоят от наиболее глубокого уровня ($J = 0$) на расстояниях, относящихся как 1 : 3, 3 : 7 : 12...

Формула (119,2), однако, недостаточна для состояний с $\Omega = 1/2$, которое может иметь место у ядер с нечетным числом нуклонов. В этом случае возникает сравнимый с (119,2) вклад в энергию, связанный со взаимодействием нечетного нуклона с центробежным полем вращающегося ядра. Его зависимость от J можно найти следующим образом.

Как известно из механики (см. I, § 39), энергия частицы во вращающейся системе координат содержит дополнительный член, равный произведению угловой скорости вращения на момент импульса частицы. Соответствующий член в гамильтониане ядра

[1]) В сферических ядрах тем не менее оказывалось возможным определить величину l в результате совместного применения сохранения четности и момента.

можно представить в виде $2b\widehat{\mathbf{K}}\widehat{\sigma}$, где b — некоторая постоянная; $\widehat{\mathbf{K}}$ — вращательный момент остова ядра (ядро без последнего нуклона), а $\widehat{\sigma}$ — момент нуклона; последний надо понимать здесь в чисто формальном смысле (в действительности вектор момента нуклона в аксиальном поле ядра не существует), как оператор, аналогичный оператору спина 1/2, дающий переходы между состояниями со значениями проекции момента $\pm 1/2$ — в соответствии со значением $\Omega = 1/2$ [1]). Поскольку $\mathbf{K} = \mathbf{J} - \sigma$, то собственные значения этого оператора

$$2b\mathbf{K}\sigma = b\left[J(J+1) - K(K+1) - \frac{3}{4}\right].$$

Добавив сюда для удобства не зависящую от J постоянную $b/2$, найдем, что эта величина равна $\pm b(J+1/2)$ при $J = K \pm 1/2$.

Это выражение можно записать в виде $(-1)^{J-1/2}\, b\,(J+1/2)$, если учесть, что момент K остова (представляющего собой четно-четное ядро) является четным числом. Таким образом, окончательно получаем следующее выражение для вращательной энергии ядра с $\Omega = 1/2$:

$$E_{\text{вр}} = \frac{\hbar^2}{2I} J(J+1) + (-1)^{J-1/2}\, b\,(J+1/2) \qquad (119,3)$$

(*A. Bohr*, *B. Mottelson*, 1953). Отметим, что если постоянная b положительна и достаточно велика, то уровень с $J = 3/2$ может оказаться лежащим ниже уровня с $J = 1/2$, т. е. может нарушиться нормальный порядок вращательных уровней, при котором низший уровень соответствует наименьшему возможному значению J.

Момент инерции несферического ядра не может быть вычислен как момент инерции твердого тела с заданной формой. Такое вычисление было бы возможно лишь, если бы нуклоны, движущиеся в самосогласованном поле ядра, можно было рассматривать как непосредственно не взаимодействующие друг с другом. В действительности же явление спаривания приводит к уменьшению момента инерции по сравнению со значением, соответствующим твердому телу.

Магнитный момент μ несферического ядра складывается из магнитного момента «неподвижного» ядра и из момента, связан-

---

[1]) Специфика случая $\Omega = 1/2$ как раз и заключается в существовании матричных элементов возмущения энергии для переходов между состояниями, отличающимися лишь знаком проекции момента и потому относящихся к одинаковой энергии. Это приводит к появлению сдвига энергии уже в первом порядке теории возмущений.

Рассматриваемое явление аналогично Λ-удвоению уровней двухатомной молекулы с $\Omega = 1/2$ (§ 88).

ного с вращением ядра. Первый направлен (после усреднения по движению нуклонов в ядре) вдоль оси ядра; обозначив величину этого момента как μ', а единичный вектор вдоль оси ядра посредством $\mathbf{n}$, напишем его в виде $\mu'\mathbf{n}$. Магнитный же момент, связанный с вращением, направлен (после того же усреднения) вдоль вектора $\mathbf{J}-\Omega\mathbf{n}$ — полного механического момента ядра за вычетом момента нуклонов в «неподвижном ядре»[1]). Таким образом,

$$\boldsymbol{\mu} = \mu'\mathbf{n} + g_r(\mathbf{J}-\Omega\mathbf{n}). \tag{119,4}$$

Здесь g_r есть гиромагнитный множитель вращения ядра. Поскольку вклад в магнитный момент при вращении дают только протоны, то

$$g_r = \frac{I_p}{I_p+I_n}, \tag{119,5}$$

где I_n и I_p — нейтронная и протонная части момента инерции ядра (для системы из одних только протонов должно было бы быть просто $g_r = 1$). Отношение (119,5), вообще говоря, не совпадает с отношением Z/A числа протонов к полной массе ядра.

После усреднения по вращению ядра магнитный момент направлен по сохраняющемуся вектору $\mathbf{J}$:

$$\bar{\bar{\boldsymbol{\mu}}} = \frac{\mu}{J}\hat{\mathbf{J}} = (\mu'-\Omega g_r)\bar{\mathbf{n}} + g_r\hat{\mathbf{J}}.$$

Как обычно, умножаем это равенство с обеих сторон на $\hat{\mathbf{J}}$ и переходим к собственным значениям. В основном состоянии ядра $\Omega = J$ и в результате находим

$$\mu = (\mu' + g_r)\frac{J}{J+1}. \tag{119,6}$$

Задачи

1. Выразить квадрупольный момент Q вращающегося ядра через квадрупольный момент Q_0 относительно связанных с ядром осей (*A. Bohr*, 1951).

Решение. Оператор тензора квадрупольного момента вращающегося ядра выражается через Q_0 посредством

$$Q_{ik} = \frac{3}{2}Q_0\left(n_i n_k - \frac{1}{3}\delta_{ik}\right);$$

это есть симметричный тензор с равным нулю следом, составленный из компонент единичного вектора $\mathbf{n}$ вдоль оси ядра, причем $Q_{zz} = Q_0$. Усреднение по вращательному состоянию ядра проводится подобно решению задачи к § 29 с тем

[1]) Такая форма записи может быть применена лишь при $\Omega \neq 1/2$ (см. задачу 2).

только отличием, что $n_i\hat{J}_i=\Omega$, а не нулю) и приводит к выражению вида (75,2) с

$$Q = Q_0 \frac{3\Omega^2 - J(J+1)}{(2J+3)(J+1)}.$$

Для основного состояния ядра с $\Omega = J$ получим

$$Q = Q_0 \frac{(2J-1)J}{(2J+3)(J+1)}.$$

При возрастании J отношение Q/Q_0 стремится к 1, но довольно медленно.

2. Определить магнитный момент в основном состоянии ядра с $\Omega = 1/2$.

Решение. В этом случае оператор магнитного момента может быть записан с помощью введенного в тексте оператора $\hat{\sigma}$ в виде

$$\hat{\mu} = 2\mu'\hat{\sigma} + g_r\hat{\mathbf{K}}, \qquad \hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{J}} - \hat{\sigma}.$$

Дальнейшее вычисление аналогично произведенному в тексте. Если основному уровню ядра отвечает значение $J = 1/2$ (при этом число $K = J - 1/2 = 0$), то получается $\mu = \mu'$. Если же в основном состоянии $J = 3/2$ (при этом $K = J + 1/2 = 2$), то $\mu = \frac{9}{5} g_r - \frac{3}{5}\mu'$.

3. Определить энергии нескольких первых уровней вращательной структуры основного состояния четно-четного ядра, имеющего симметрию трехосного эллипсоида.

Решение. Основному состоянию четно-четного ядра соответствует наиболее симметричная волновая функция «неподвижного» ядра, т. е. функция с симметрией, отвечающей представлению A группы D_2. Имеется поэтому всего $J/2+1$ (при четном J) или $(J-1)/2$ (при нечетном J) различных уровней при заданном значении J. Для $J=2$ они даются полученной в задачах к § 103 формулой (7), а для $J=3$ — формулой (8).

§ 120. Изотопическое смещение

Специфические свойства ядра (конечная масса, размеры, спин), отличающие его от неподвижного точечного центра кулонова поля, оказывают определенное влияние на электронные уровни энергии атома.

Одним из таких эффектов является так называемое *изотопическое смещение* уровней — изменение энергии уровня при переходе от одного изотопа данного элемента к другому. Фактически, конечно, представляет интерес не изменение энергии одного уровня, а изменение разности двух уровней, наблюдаемой в виде спектральной линии. По этой причине фактически надо рассматривать не энергию всей электронной оболочки атома в целом, а лишь ту ее часть, которая связана с электроном, участвующим в данном спектральном переходе.

В легких атомах основным источником изотопического смещения является эффект конечности массы ядра. Учет движения ядра приводит к появлению в гамильтониане атома члена

$$\frac{1}{2M}\left(\sum_i \hat{\mathbf{p}}_i\right)^2,$$