ГЛАВА XVII

УПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ

§ 123. Общая теория рассеяния

В классической механике столкновения двух частиц полностью определяются их скоростями и прицельным расстоянием (расстоянием, на котором они прошли бы друг мимо друга при отсутствии взаимодействия). В квантовой механике меняется сама постановка вопроса, так как при движении с определенными скоростями понятие траектории, а с нею и прицельного расстояния теряет смысл. Целью теории является здесь лишь вычисление вероятности того, что в результате столкновения частицы отклонятся (или, как говорят, *рассеются*) на тот или иной угол. Мы говорим здесь о так называемых *упругих* столкновениях, при которых не происходит никаких превращений частиц или (если это частицы сложные) не меняется их внутреннее состояние.

Задача об упругом столкновении, как и всякая задача двух тел, сводится к задаче о рассеянии одной частицы с приведенной массой в поле $U(r)$ неподвижного силового центра [1]). Сведение осуществляется переходом к системе координат, в которой покоится центр инерции обеих частиц. Угол рассеяния в этой системе обозначим посредством θ. Он связан простыми формулами с углами θ_1 и θ_2 отклонения обеих частиц в «лабораторной» системе координат, в которой одна из частиц (вторая) до столкновения покоилась:

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = \frac{m_2\sin\theta}{m_1 + m_2\cos\theta}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\pi-\theta}{2}, \tag{123,1}$$

где m_1, m_2 — массы частиц (см. I, § 17). В частности, если массы обеих частиц одинаковы ($m_1 = m_2$), то получается просто

$$\vartheta_1 = \frac{\theta}{2}, \qquad \vartheta_2 = \frac{\pi-\theta}{2}; \tag{123,2}$$

сумма $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \pi/2$, т. е. частицы разлетаются под прямым углом.

---

[1]) Мы пренебрегаем спин-орбитальным взаимодействием частиц (если они обладают спином). Предполагая поле центрально-симметричным, мы тем самым исключаем здесь из рассмотрения также и такие процессы, как, например, рассеяние электронов на молекулах.

Ниже в этой главе мы пользуемся везде (где противное не оговорено особо) системой координат, связанной с центром инерции, а под m подразумевается приведенная масса сталкивающихся частиц.

Свободная частица, движущаяся в положительном направлении оси z, описывается плоской волной, которую мы напишем в виде $\psi = e^{ikz}$, т. е. выберем нормировку, при которой плотность потока в волне равна скорости частиц v. Рассеянные частицы описываются вдали от центра расходящейся сферической волной вида $f(\theta)\, e^{ikr}/r$, где $f(\theta)$ — некоторая функция угла рассеяния θ (угол между осью z и направлением рассеянной частицы); эту функцию называют *амплитудой рассеяния*. Таким образом, точная волновая функция, являющаяся решением уравнения Шредингера с потенциальной энергией $U(r)$, должна иметь на больших расстояниях асимптотический вид

$$\psi \approx e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr}. \tag{123,3}$$

Вероятность рассеянной частице пройти в единицу времени через элемент поверхности $dS = r^2\, do$ (do — элемент телесного угла) равна $vr^{-2}\, |f|^2\, dS = v\, |f|^2\, do$ [1]). Ее отношение к плотности потока в падающей волне равно

$$d\sigma = |f(\theta)|^2\, do. \tag{123,4}$$

Эта величина имеет размерность площади и называется *эффективным сечением* (или просто *сечением*) рассеяния внутри телесного угла do. Если положить $do = 2\pi \sin\theta\, d\theta$, то мы получим сечение

$$d\sigma = 2\pi \sin\theta\, |f(\theta)|^2\, d\theta \tag{123,5}$$

для рассеяния в интервале углов между θ и $\theta + d\theta$.

Решение уравнения Шредингера, описывающее рассеяние в центральном поле $U(r)$, должно, очевидно, быть аксиально-симметричным относительно оси z — направления падающих частиц. Всякое такое решение может быть представлено в виде суперпозиции волновых функций непрерывного спектра, отвечающих движению в данном поле частиц с заданной энергией $\hbar^2 k^2/2m$ и орбитальными моментами с различными величинами l и равными нулю z-проекциями (эти функции не зависят от ази-

[1]) В этом рассуждении молчаливо подразумевается, что падающий пучок частиц ограничен широкой (во избежание дифракционных эффектов), но конечной диафрагмой, как это и имеет место в реальных экспериментах по рассеянию. По этой причине нет интерференции между обоими членами в выражении (123,3); квадрат $|\psi|^2$ берется в точках, в которых отсутствует падающая волна.

мутального угла φ вокруг оси z, т. е. аксиально-симметричны). Таким образом, искомая волновая функция имеет форму

$$\psi = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(\cos\theta) R_{kl}(r), \tag{123,6}$$

где A_l — постоянные, а $R_{kl}(r)$ — радиальные функции, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_{kl}}{dr}\right) + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2}U(r)\right]R_{kl} = 0. \tag{123,7}$$

Коэффициенты A_l должны быть выбраны так, чтобы функция (123,6) имела на больших расстояниях асимптотический вид (123,3). Покажем, что для этого надо положить

$$A_l = \frac{1}{2k}(2l+1)\, i^l \exp(i\delta_l), \tag{123,8}$$

где δ_l — фазовые сдвиги функций R_{kl}. Тем самым будет решена также и задача о выражении амплитуды рассеяния через эти фазы.

Асимптотический вид функции R_{kl} дается формулой (33,20)

$$R_{kl} \approx \frac{2}{r}\sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) =$$
$$= \frac{1}{ir}\{(-i)^l \exp[i(kr+\delta_l)] - i^l \exp[-i(kr+\delta_l)]\}.$$

Подставив это выражение, а также (123,8) в (123,6), получим асимптотическое выражение волновой функции в виде

$$\psi \approx \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left[(-1)^{l+1}e^{-ikr} + S_l e^{ikr}\right], \tag{123,9}$$

где введено обозначение

$$S_l = \exp(2i\delta_l). \tag{123,10}$$

С другой стороны, разложение плоской волны (34,2), после такого же преобразования, есть

$$e^{ikz} \approx \frac{1}{2ikr}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\left[(-1)^{l+1}e^{-ikr} + e^{ikr}\right].$$

Мы видим, что в разности $\psi - e^{ikz}$ все члены, содержащие множители e^{-ikr}, как и следовало, выпадают. Для коэффициента же при e^{ikr}/r в этой разности, т. е. для амплитуды рассеяния, находим

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta). \tag{123,11}$$

Эта формула решает задачу о выражении амплитуды рассеяния через фазы δ_l (*H. Faxen*, *J. Holtsmark*, 1927)[1]).

Проинтегрировав $d\sigma$ по всем углам, мы получим полное сечение рассеяния σ, представляющее собой отношение полной вероятности рассеяния частицы (в единицу времени) к плотности потока в падающей волне. Подставляя (123,11) в интеграл

$$\sigma = 2\pi \int_0^\pi |f(\theta)|^2 \sin\theta\, d\theta$$

и помня, что полиномы Лежандра с различными l взаимно ортогональны, а

$$\int_0^\pi P_l^2(\cos\theta)\sin\theta\, d\theta = \frac{2}{2l+1},$$

получим следующее выражение для полного сечения:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\sin^2\delta_l. \tag{123,12}$$

Каждый из членов этой суммы представляет собой *парциальное* сечение σ_l для рассеяния частиц с заданным орбитальным моментом l. Отметим, что максимальное возможное значение этого сечения есть

$$\sigma_{l\,\max} = \frac{4\pi}{k^2}(2l+1). \tag{123,13}$$

Сравнив его с формулой (34,5), видим, что число частиц, рассеянных с моментом l, может оказаться в 4 раза большим числа таких частиц в падающем потоке. Это обстоятельство является чисто квантовым эффектом, связанным с интерференцией между рассеянными и нерассеянными частицами.

---

[1]) Принципиальный интерес представляет вопрос о восстановлении вида рассеивающего потенциала по предполагаемым известным фазам δ_l. Этот вопрос решен *И. М. Гельфандом*, *Б. М. Левитаном* и *В. А. Марченко*. Оказывается, что для определения $U(r)$ достаточно в принципе знать $\delta_0(k)$ как функцию волнового вектора во всей области от $k = 0$ до $k = \infty$, а также коэффициенты a_n в асимптотических (при $r \to \infty$) выражениях

$$R_{n0} \approx a_n e^{-\varkappa_n r}/r \qquad (\varkappa_n = \sqrt{2m|E_n|}/\hbar)$$

волновых функций состояний, соответствующих дискретным (отрицательным) уровням энергии E_n, если таковые вообще имеются. Определение $U(r)$ по этим данным сводится к решению определенного линейного интегрального уравнения. Систематическое изложение этого вопроса можно найти в книге: *В. де Альфаро*, *Т. Редже*, Потенциальное рассеяние, «Мир», 1966.

Ниже нам будет удобно пользоваться также *парциальными амплитудами* рассеяния f_l, которые мы определим как коэффициенты разложения

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\cos\theta). \qquad (123,14)$$

Согласно (123,11) они связаны с фазами δ_l посредством

$$f_l = \frac{1}{2ik}(S_l - 1) = \frac{1}{2ik}\left(e^{2i\delta_l} - 1\right), \qquad (123,15)$$

а парциальные сечения

$$\sigma_l = 4\pi\,(2l+1)\,|f_l|^2. \qquad (123,16)$$

Задача

Выразить амплитуду рассеяния через фазовые сдвиги в двумерном случае. Поле $U = U(\rho)$, $\rho = \sqrt{x^2+z^2}$. Поток частиц в направлении оси z.

Решение. В двумерном случае волновая функция вдали от рассеивателя представляет собой суперпозицию плоской и расходящейся цилиндрической волн:

$$\psi = e^{ikz} + f(\varphi)\frac{e^{ik\rho}}{\sqrt{-i\rho}}. \qquad (1)$$

Здесь φ — угол между осью z и направлением рассеяния, $f(\varphi)$ — амплитуда рассеяния, имеющая в двумерном случае размерность корня из длины. Множитель $-i = \exp(-i\pi/2)$ под корнем введен для упрощения последующих формул. Сечение рассеяния, отнесенное к единице длины вдоль оси y, равно

$$d\sigma = |f|^2\,d\varphi.$$

Оно имеет размерность длины.

Волновую функцию нужно разложить по функциям с определенной проекцией m углового момента на ось y, имеющим вид $Q_m(\rho)\,e^{im\varphi}$. Радиальные функции на больших расстояниях от рассеивателя отличаются от полученных в задаче к § 34 функций свободного движения только фазовым сдвигом

$$Q_m(\rho) \approx i^m \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}}\sin\left[k\rho - \frac{\pi}{2}(m-1/2) + \delta_m\right],$$

причем $\delta_m = \delta_{-m}$. Повторяя рассуждения настоящего параграфа с использованием разложения плоской волны из задачи к § 34, находим, что функция с асимптотическим видом (1) дается рядом

$$\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\delta_m} Q_m(\rho)\,e^{im\varphi},$$

а амплитуда рассеяния равна

$$f(\varphi) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi k}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(e^{2i\delta_m} - 1\right)e^{im\varphi}. \qquad (2)$$

Интегрируя, находим полное сечение

$$\sigma = \int_0^{2\pi} |f|^2 d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_m, \quad \text{где} \quad \sigma_m = \sigma_{-m} = \frac{4}{k}\sin^2\delta_m.$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\operatorname{Im} f(0) = \sqrt{\frac{k}{8\pi}}\,\sigma, \tag{3}$$

выражающего собой оптическую теорему для двумерного случая (см. ниже формулу (125,9)).

§ 124. Исследование общей формулы

Полученные формулы применимы в принципе к рассеянию в любом поле $U(r)$, обращающемся на бесконечности в нуль. Исследование этих формул сводится к исследованию свойств входящих в них фаз δ_l.

Для оценки порядка величины фаз δ_l с большими значениями l воспользуемся тем, что при больших l движение квазиклассично (см. § 49). Поэтому фаза волновой функции определяется интегралом

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} - \frac{2mU(r)}{\hbar^2}}\,dr + \frac{\pi}{4},$$

где r_0 есть корень подкоренного выражения ($r > r_0$ есть классически доступная область движения). Вычтя отсюда фазу

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}\,dr + \frac{\pi}{4}$$

волновой функции свободного движения и положив $r \to \infty$, мы получим, по определению, величину δ_l. При больших l значение r_0 тоже велико; поэтому во всей области интегрирования $U(r)$ мало, и мы получаем приближенно

$$\delta_l = -\int_{r_0}^{\infty} \frac{mU(r)\,dr}{\hbar^2\sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}}. \tag{124,1}$$

По порядку величины этот интеграл (если он сходится) равен

$$\delta_l \sim \frac{mU(r_0)\,r_0}{k\hbar^2}. \tag{124,2}$$

Порядок величины r_0 есть $r_0 \sim l/k$.

Если $U(r)$ обращается на бесконечности в нуль, как r^{-n} с $n > 1$, то интеграл (124,1) сходится и фазы δ_l конечны. На-