Интегрируя, находим полное сечение

$$\sigma = \int_0^{2\pi} |f|^2 d\varphi = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sigma_m, \quad \text{где} \quad \sigma_m = \sigma_{-m} = \frac{4}{k}\sin^2\delta_m.$$

Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$\operatorname{Im} f(0) = \sqrt{\frac{k}{8\pi}}\,\sigma, \tag{3}$$

выражающего собой оптическую теорему для двумерного случая (см. ниже формулу (125,9)).

§ 124. Исследование общей формулы

Полученные формулы применимы в принципе к рассеянию в любом поле $U(r)$, обращающемся на бесконечности в нуль. Исследование этих формул сводится к исследованию свойств входящих в них фаз δ_l.

Для оценки порядка величины фаз δ_l с большими значениями l воспользуемся тем, что при больших l движение квазиклассично (см. § 49). Поэтому фаза волновой функции определяется интегралом

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} - \frac{2mU(r)}{\hbar^2}}\,dr + \frac{\pi}{4},$$

где r_0 есть корень подкоренного выражения ($r > r_0$ есть классически доступная область движения). Вычтя отсюда фазу

$$\int_{r_0}^{r} \sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}\,dr + \frac{\pi}{4}$$

волновой функции свободного движения и положив $r \to \infty$, мы получим, по определению, величину δ_l. При больших l значение r_0 тоже велико; поэтому во всей области интегрирования $U(r)$ мало, и мы получаем приближенно

$$\delta_l = -\int_{r_0}^{\infty} \frac{mU(r)\,dr}{\hbar^2\sqrt{k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2}}}. \tag{124,1}$$

По порядку величины этот интеграл (если он сходится) равен

$$\delta_l \sim \frac{mU(r_0)\,r_0}{k\hbar^2}. \tag{124,2}$$

Порядок величины r_0 есть $r_0 \sim l/k$.

Если $U(r)$ обращается на бесконечности в нуль, как r^{-n} с $n > 1$, то интеграл (124,1) сходится и фазы δ_l конечны. Напротив, при $n \leqslant 1$ интеграл расходится, так что фазы δ_l оказываются бесконечными. Это относится к произвольным l, так как сходимость или расходимость интеграла (124,1) зависит от поведения $U(r)$ при больших r, а на больших расстояниях (где поле $U(r)$ уже слабо) радиальное движение квазиклассично при любом l. Как надо понимать формулы (123,11)—(123,12) при бесконечных δ_l, будет указано ниже.

Рассмотрим сначала сходимость ряда (123,12), представляющего полное сечение рассеяния. При больших l фазы $\delta_l \ll 1$, как это видно из (124,1), если учесть, что $U(r)$ спадает быстрее, чем $1/r$. Поэтому можно положить $\sin^2\delta_l \approx \delta_l^2$, и, таким образом, сумма далеких членов ряда (123,12) будет порядка $\sum\limits_{l \gg 1} l\delta_l^2$. Согласно известному интегральному признаку сходимости рядов заключаем, что рассматриваемый ряд сходится, если сходится интеграл $\int\limits^{\infty} l\delta_l^2\,dl$. Подставив сюда (124,2) и заменив l на kr_0, получим интеграл

$$\int\limits^{\infty} U^2(r_0)\,r_0^3\,dr_0.$$

Если $U(r)$ спадает на бесконечности, как r^{-n} с $n > 2$, этот интеграл сходится, и полное сечение конечно. Напротив, если поле $U(r)$ убывает, как $1/r^2$, или еще медленнее, то полное сечение оказывается бесконечным. Физически это связано с тем, что при медленном убывании поля с расстоянием вероятность рассеяния на малые углы становится очень большой. Напомним в этой связи, что в классической механике во всяком поле, обращающемся в нуль только при $r \to \infty$, частица, проходящая на любом сколь угодно большом, но конечном, прицельном расстоянии ρ, все же испытывает отклонение на некоторый малый, но отличный от нуля угол; поэтому полное сечение рассеяния оказывается бесконечным при всяком законе спадания $U(r)$ [1]). В квантовой механике такое рассуждение неприменимо уже потому, что говорить о рассеянии на некоторый угол можно лишь при условии, чтобы этот угол был велик по сравнению с неопределенностью в направлении движения частицы. Если же прицельное расстояние известно с точностью до $\Delta\rho$, то тем самым создается неопределенность $\hbar/\Delta\rho$ в поперечной компоненте импульса, т. е. неопределенность $\sim\hbar/mv\,\Delta\rho$ в угле.

Ввиду большой роли, которую играет рассеяние на малые углы при медленном законе убывания $U(r)$, естественно возникает вопрос — не будет ли расходиться амплитуда рассеяния $f(\theta)$

---

[1]) Это проявляется в расходимости интеграла $\int 2\pi\rho\,d\rho$, которым определяется в классической механике полное сечение.

при $\theta = 0$ даже при $U(r)$, убывающем быстрее чем $1/r^2$. Положив в (123,11) $\theta = 0$, получаем для далеких членов суммы выражение, пропорциональное $\sum\limits_{l \gg 1} l\delta_l$. Рассуждая как в предыдущем случае, приходим при отыскании критерия конечности суммы к интегралу

$$\int^{\infty} U(r_0) r_0^2 dr_0,$$

расходящемуся уже при $U(r) \backsim r^{-n}$ $(n \leqslant 3)$. Таким образом, амплитуда рассеяния обращается в бесконечность при $\theta = 0$ в полях, спадающих как $1/r^3$ или медленнее.

Наконец, остановимся на случае, когда сама фаза δ_l бесконечна, что имеет место при $U(r) \backsim r^{-n}$ $(n \leqslant 1)$. Заранее очевидно из полученных выше результатов, что при таком медленном убывании поля будет бесконечным как полное сечение, так и амплитуда рассеяния при $\theta = 0$. Остается, однако, вопрос о вычислении $f(\theta)$ для $\theta \neq 0$. Прежде всего заметим, что имеет место формула [1])

$$\sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) = 4\delta(1-\cos\theta). \qquad (124,3)$$

Другими словами, при всех $\theta \neq 0$ эта сумма равна нулю. Поэтому в выражении (123,11) для амплитуды рассеяния можно при $\theta \neq 0$ опустить единицу в квадратных скобках в каждом члене суммы, так что останется

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i\delta_l}. \qquad (124,4)$$

Если умножить правую сторону равенства на постоянный множитель $\exp(-2i\delta_0)$, то это не скажется на сечении, определяемом квадратом модуля $|f(\theta)|^2$, а фаза комплексной функции $f(\theta)$ изменится лишь на несущественную постоянную. С другой стороны, в разности $\delta_l - \delta_0$ выражений (124,1) расходящийся интеграл от $U(r)$ сокращается и остается некоторая конечная величина. Таким образом, для вычисления амплитуды рассеяния в рассматриваемом случае можно пользоваться формулой

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(\cos\theta) e^{2i(\delta_l - \delta_0)}. \qquad (124,5)$$

[1]) Эта формула представляет собой разложение δ-функции по полиномам Лежандра и непосредственно проверяется умножением с обеих сторон на $\sin\theta\, P_l(\cos\theta)$ и интегрированием по $d\theta$. При этом интеграл $\int\limits_0^{\infty} \delta(x)\,dx$ от четной функции $\delta(x)$ принимается равным $1/2$.

§ 125. Условие унитарности для рассеяния

Амплитуда рассеяния в произвольном (не обязательно центральном) поле удовлетворяет определенным соотношениям, являющимся следствием некоторых общих физических требований.

Асимптотический вид волновой функции на больших расстояниях при упругом рассеянии в произвольном поле

$$\psi \approx e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'} + \frac{1}{r} f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') e^{ikr}. \qquad (125,1)$$

Эта форма записи отличается от (123,3) в том отношении, что амплитуда рассеяния зависит здесь от направлений двух единичных векторов — вдоль направления падения частиц ($\mathbf{n}$) и вдоль направления рассеяния ($\mathbf{n}'$), а не только от угла между ними.

Любая линейная комбинация функций вида (125,1) с различными направлениями падения $\mathbf{n}$ тоже представляет некоторый возможный процесс рассеяния. Умножив функции (125,1) на произвольные коэффициенты $F(\mathbf{n})$ и проинтегрировав по всем направлениям $\mathbf{n}$ (элемент телесного угла do), напишем такую линейную комбинацию в виде интеграла

$$\int F(\mathbf{n}) e^{ikr\mathbf{n}\mathbf{n}'} do + \frac{e^{ikr}}{r} \int F(\mathbf{n}) f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') do. \qquad (125,2)$$

Поскольку расстояние r сколь угодно велико, множитель $\exp(ikr\mathbf{n}\mathbf{n}')$ в первом интеграле является быстро осциллирующей функцией направления переменного вектора $\mathbf{n}$. Значение интеграла определяется поэтому в основном областями вблизи тех значений $\mathbf{n}$, при которых показатель экспоненты имеет экстремум ($\mathbf{n} = \pm\mathbf{n}'$). В каждой из областей множитель $F(\mathbf{n}) \approx F(\pm\mathbf{n}')$, можно вынести за знак интеграла, после чего интегрирование дает [1])

$$2\pi i F(-\mathbf{n}') \frac{e^{-ikr}}{kr} - 2\pi i F(\mathbf{n}') \frac{e^{ikr}}{kr} + \frac{e^{ikr}}{r} \int f(\mathbf{n}, \mathbf{n}') F(\mathbf{n}) do.$$

Перепишем это выражение в компактном операторном виде, опустив общий множитель $2\pi i/k$:

$$\frac{e^{-ikr}}{r} F(-\mathbf{n}') - \frac{e^{ikr}}{r} \hat{S} F(\mathbf{n}'), \qquad (125,3)$$

где

$$\hat{S} = 1 + 2ik\hat{f}, \qquad (125,4)$$

[1]) Для вычисления интеграла смещаем путь интегрирования по переменной $\mu = \cos\theta$ (θ — угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$) в плоскости комплексного μ так, чтобы он выгибался в сторону верхней полуплоскости, оставаясь закрепленным на своих концах $\mu = \pm 1$. Тогда при удалении от каждого из этих концов функция $e^{ikr\mu}$ быстро затухает.