подстановке в правую сторону определения (125,5) получалось просто $f(\theta)$ (где теперь θ — угол между $\mathbf{n}'$ и осью z). Представив δ-функцию в виде (124,3)

$$F = 4\delta(1-\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta) \qquad (125,17)$$

и применив к ней оператор $\hat{f}$, мы получим, как и следовало, амплитуду рассеяния в виде (123,14).

Наконец, сделаем еще следующее замечание. С математической точки зрения, условие унитарности (125,8) показывает, что не всякая наперед заданная функция $f(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ могла бы быть амплитудой рассеяния в каком-либо поле. В частности, не всякая функция $f(\theta)$ могла бы быть амплитудой рассеяния в каком-либо центральном поле. В силу (125,13) должно выполняться определенное соотношение между ее вещественной и мнимой частями. Если написать $f(\theta) = |f|e^{i\alpha}$, то при заданном для всех углов модуле $|f|$ соотношение (125,13) даст интегральное уравнение, из которого в принципе можно определить неизвестную фазу $\alpha(\theta)$. Другими словами, по известному для всех углов сечению рассеяния (квадрату $|f|^2$) можно в принципе восстановить и амплитуду. Это восстановление, однако, не вполне однозначно и определяет амплитуду лишь с точностью до замены

$$f(\theta) \to -f^*(\theta), \qquad (125,18)$$

оставляющей инвариантным уравнение (125,13) и, конечно, не меняющей сечения $|f|^2$ (преобразование (125,18) эквивалентно одновременному изменению знака всех фаз δ_l в (123,11)). Эта неоднозначность, однако, устраняется, если амплитуда рассеяния рассматривается не только в зависимости от угла, но и от энергии. Мы увидим ниже (§ 128, 129), что аналитические свойства амплитуды как функции энергии не инвариантны относительно преобразования (125,18).

§ 126. Формула Борна

Сечение рассеяния может быть вычислено в общем виде в очень важном случае, когда рассеивающее поле может рассматриваться как возмущение [1]). В § 45 было показано, что это возможно при выполнении хотя бы одного из двух условий:

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \qquad (126,1)$$

[1]) В развитой в § 123 общей теории это приближение соответствует случаю, когда все фазы δ_l малы; сверх того, необходимо, чтобы эти фазы могли быть вычислены из уравнения Шредингера, в котором потенциальная энергия рассматривается как возмущение (см. задачу 4).

или

$$|U| \ll \frac{\hbar v}{a} = \frac{\hbar^2}{ma^2} ka, \tag{126,2}$$

где a — радиус действия поля $U(r)$, а U — порядок его величины в основной области его существования. При выполнении первого условия рассматриваемое приближение применимо при всех скоростях. Из второго же условия видно, что оно во всяком случае применимо для достаточно быстрых частиц.

В соответствии с § 45 ищем волновую функцию в виде $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$, где $\psi^{(0)} = e^{i\mathbf{kr}}$ соответствует падающей частице с волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$. Из формулы (45,3) имеем

$$\psi^{(1)}(x, y, z) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(x', y', z') e^{i(\mathbf{kr}'+kR)} \frac{dV'}{R}. \tag{126,3}$$

Выбрав рассеивающий центр в качестве начала координат, введем радиус-вектор $\mathbf{R}_0$ в точку наблюдения $\psi^{(1)}$ и обозначим посредством $\mathbf{n}'$ единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$. Пусть радиус-вектор элемента объема dV' есть $\mathbf{r}'$, тогда $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}'$. На больших расстояниях от центра $R_0 \gg r'$, так что

$$R = |\mathbf{R}_0 - \mathbf{r}'| \approx R_0 - \mathbf{r}'\mathbf{n}'.$$

Подставив это в (126,3), получим следующее асимптотическое выражение для $\psi^{(1)}$:

$$\psi^{(1)} \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int U(\mathbf{r}') e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\mathbf{r}'} dV'$$

(где $\mathbf{k}' = k\mathbf{n}'$ — волновой вектор частицы после рассеяния). Сравнивая с определением амплитуды рассеяния в (123,3), получим для нее выражение

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U e^{-i\mathbf{qr}} dV, \tag{126,4}$$

в котором мы произвели переобозначение переменных интегрирования и ввели вектор

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} \tag{126,5}$$

с абсолютной величиной

$$q = 2k \sin\frac{\theta}{2}, \tag{126,6}$$

где θ — угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}'$, т. е. угол рассеяния.

Наконец, возведя в квадрат модуль амплитуды рассеяния, получим следующую формулу для сечения рассеяния в элемент телесного угла do:

$$d\sigma = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int U e^{-i\mathbf{qr}} dV\right|^2 do. \tag{126,7}$$

Мы видим, что рассеяние с изменением импульса на $\hbar\mathbf{q}$ определяется квадратом модуля соответствующей компоненты Фурье поля U. Формула (126,7) была впервые получена *Борном* (*M. Born*, 1926); такое приближение в теории столкновений часто называют *борновским приближением*.

Отметим, что в этом приближении имеет место соотношение

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = f^*(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \qquad (126,8)$$

между амплитудами прямого и обратного (в буквальном смысле слова) процессов рассеяния, т. е. процессов, отличающихся друг от друга перестановкой начального и конечного импульсов, без изменения их знаков, как при обращении времени. Таким образом, в рассеянии появляется дополнительное (помимо теоремы взаимности (125,12)) свойство симметрии. Это свойство тесно связано с малостью амплитуд рассеяния в теории возмущений и непосредственно следует из условия унитарности (125,8), если пренебречь в нем интегральным членом, квадратичным по f [1]).

Формула (126,7) может быть получена также и другим способом (который, однако, оставляет неопределенной фазу амплитуды рассеяния). Именно, мы можем исходить из общей формулы (43,1), согласно которой вероятность перехода между состояниями непрерывного спектра дается формулой

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|U_{fi}|^2\,\delta(E_f - E_i)\,dv_f.$$

В данном случае мы должны применить эту формулу к переходу из состояния падающей свободной частицы с импульсом $\mathbf{p}$ в состояние частицы с импульсом $\mathbf{p}'$, рассеянной в элемент телесного угла do'. В качестве интервала состояний dv_f выбираем $d^3p'/(2\pi\hbar)^3$. Подставив для разности конечной и начальной энергий $E_f - E_i = (p'^2 - p^2)/2m$, имеем

$$dw_{\mathbf{p}'\mathbf{p}} = \frac{4\pi m}{\hbar}|U_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}|^2\,\delta(p'^2 - p^2)\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}. \qquad (126,9)$$

Волновые функции падающей и рассеянной частиц — плоские волны. Поскольку в качестве интервала состояний dv_f выбран элемент пространства $\mathbf{p}/2\pi\hbar$, то конечная волновая функция должна быть нормирована на δ-функцию от $\mathbf{p}/2\pi\hbar$:

$$\psi_{\mathbf{p}'} = e^{i\mathbf{p}'\mathbf{r}/\hbar}. \qquad (126,10)$$

Начальную же волновую функцию нормируем на единичную плотность потока

$$\psi_{\mathbf{p}} = \sqrt{\frac{m}{p}}\,e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar}. \qquad (126,11)$$

---

[1]) Отсюда ясно, что это свойство исчезает уже при переходе ко второму приближению теории возмущений. Мы убедимся в этом непосредственным образом в § 130 в связи с формулой (130,13).

Тогда выражение (126,9) будет иметь размерность площади и представляет собой дифференциальное сечение рассеяния.

Наличие δ-функции в формуле (126,9) означает, что $p' = p$, т. е. абсолютная величина импульса не меняется, как и должно быть при упругом рассеянии. Можно исключить δ-функцию, перейдя к сферическим координатам в импульсном пространстве $\left(\text{т. е. заменив } d^3p' \text{ на } p'^2\,dp'\,do' = \frac{1}{2}p'd\,(p'^2)\,do'\right)$ и проинтегрировав по $d\,(p'^2)$. Интегрирование сводится к замене абсолютного значения p' на p в подынтегральном выражении, и мы получим

$$d\sigma = \frac{mp}{4\pi^2\hbar^4}\left|\int \psi^*_{\mathbf{p}'}U\psi_{\mathbf{p}}\,dV\right|^2 do'.$$

Подставив сюда функции (126,10), (126,11), мы снова вернемся к формуле (126,7).

В виде (126,7) эта формула применима к рассеянию в поле $U\,(x, y, z)$, являющемся функцией от координат в любой их комбинации, а не только от r. Но в случае центрального поля $U\,(r)$ она может быть подвергнута дальнейшему преобразованию.

В интеграле

$$\int U\,(r)\,e^{-i\mathbf{qr}}\,dV$$

воспользуемся сферическими пространственными координатами r, ϑ, φ с полярной осью, выбранной в направлении вектора $\mathbf{q}$ (полярный угол обозначаем посредством ϑ в отличие от угла рассеяния θ). Интегрирование по ϑ и φ может быть произведено, и в результате получим

$$\int_0^\infty\int_0^{2\pi}\int_0^\pi U\,(r)\,e^{iqr\cos\vartheta}r^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,dr = 4\pi\int_0^\infty U\,(r)\frac{\sin qr}{q}\,r\,dr.$$

Подставив это выражение в (126,4), получим следующую формулу для амплитуды рассеяния в центрально-симметричном поле:

$$f = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty U\,(r)\frac{\sin qr}{q}\,r\,dr. \qquad (126,12)$$

При $\theta = 0$ (т. е. $q = 0$) стоящий здесь интеграл расходится, если $U\,(r)$ убывает на бесконечности, как $1/r^3$, или медленнее (в согласии с общими результатами § 124).

Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство. Импульс p частицы и угол рассеяния θ входят в (126,12) только через q. Таким образом, в борновском приближении сечение рассеяния зависит от p и θ только в комбинации $p\sin(\theta/2)$.

Возвращаясь к общему случаю произвольных полей $U(x, y, z)$, рассмотрим предельные случаи малых ($ka \ll 1$) и больших ($ka \gg 1$) скоростей.

При малых скоростях можно в интеграле (126,4) положить $e^{-i\mathbf{qr}} \approx 1$, так что амплитуда рассеяния

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U\,dV, \tag{126,13}$$

а если $U = U(r)$, то

$$f = -\frac{2m}{\hbar^2}\int U(r)\,r^2\,dr. \tag{126,14}$$

Рассеяние оказывается здесь изотропным по направлениям и не зависящим от скорости, что находится в согласии с общими результатами § 132.

В обратном предельном случае больших скоростей рассеяние резко анизотропно и направлено вперед, в узком конусе с углом раствора $\Delta\theta \sim 1/ka$. Действительно, вне этого конуса величина q велика, множитель $e^{-i\mathbf{qr}}$ есть быстро осциллирующая функция и интеграл от его произведения на медленно меняющуюся функцию U близок к нулю.

Закон убывания сечения при больших значениях q не является универсальным и зависит от конкретного вида поля. Если поле $U(r)$ имеет какую-либо особенность при $r = 0$ или при каком-либо другом вещественном значении r, то определяющую роль в интеграле в (126,12) играет область вблизи этой точки и убывание сечения происходит по степенному закону. То же самое относится и к случаю, когда функция $U(r)$ не имеет особенности, но не является четной — основную роль в интеграле играет при этом область вблизи $r = 0$. Если же $U(r)$ есть четная функция r, то интегрирование можно формально распространить и на отрицательные значения r, т. е. производить его вдоль всей вещественной оси переменной r, после чего (если $U(r)$ не имеет особых точек на вещественной оси) можно сместить путь интегрирования в комплексную область до его «зацепления» за ближайшую комплексную особую точку. В результате при больших q интеграл оказывается убывающим по экспоненциальному закону. Следует, однако, иметь в виду, что для вычисления этой экспоненциально малой величины борновское приближение, вообще говоря, непригодно (см. также § 131).

Хотя величина дифференциального сечения рассеяния внутри конуса $\Delta\theta \sim 1/ka$ от скорости в основном не зависит, но, благодаря уменьшению угла раствора конуса, полное сечение рассеяния $\left(\text{если интеграл } \int d\sigma \text{ вообще сходится}\right)$ при больших энергиях убывает. Именно, полное сечение убывает вместе с величи-

ной телесного угла, вырезываемого конусом, пропорционально $(\Delta\theta)^2 \sim 1/k^2a^2$, т. е. обратно пропорционально энергии.

Во многих физических применениях теории столкновений в качестве величины, характеризующей рассеяние, фигурирует интеграл

$$\sigma_{tr} = \int (1 - \cos\theta)\, d\sigma, \tag{126,15}$$

называемый часто *транспортным сечением*. Соображения, аналогичные указанным выше, показывают, что при больших скоростях эта величина обратно пропорциональна квадрату энергии.

Задачи

1. Определить в борновском приближении сечение рассеяния сферической потенциальной ямой: $U = -U_0$ при $r < a$, $U = 0$ при $r > a$.

Решение. Вычисление интеграла в (126,12) приводит к результату:

$$d\sigma = 4a^2 \left(\frac{mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2 \frac{(\sin qa - qa\cos qa)^2}{(qa)^6}\, do.$$

Интегрирование по всем углам (которое удобно произвести, переходя к переменной $q = 2k\sin(\theta/2)$ и заменив do на $2\pi q\, dq/k^2$) дает полное сечение рассеяния

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2}\left(\frac{mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2 \left[1 - \frac{1}{(2ka)^2} + \frac{\sin 4ka}{(2ka)^3} - \frac{\sin^2 2ka}{(2ka)^4}\right].$$

В предельных случаях эта формула дает

$$\sigma = \frac{16\pi a^2}{9}\left(\frac{mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2 \quad \text{при} \quad ka \ll 1,$$

$$\sigma = \frac{2\pi}{k^2}\left(\frac{mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2 \quad \text{при} \quad ka \gg 1.$$

2. То же в поле $U = U_0 e^{-r^2/a^2}$.

Решение. Вычисление удобно производить по формуле (126,7), выбрав направление $\mathbf{q}$ в качестве направления одной из осей координат. В результате получим

$$d\sigma = \frac{\pi a^2}{4}\left(\frac{mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2 e^{-q^2a^2/2}\, do$$

и полное сечение

$$\sigma = \frac{\pi^2}{2k^2}\left(\frac{mU_0a^2}{\hbar^2}\right)^2 (1 - e^{-2k^2a^2}).$$

Условия применимости этих формул даются неравенствами (126,1), (126,2) с U_0 в качестве U. Кроме того, формула для $d\sigma$ неприменима, если показатель экспоненты велик по своей абсолютной величине[1]).

---

[1]) В неприменимости теории возмущений в этом случае легко убедиться, вычислив амплитуду рассеяния во втором приближении (см. ниже (130,13)): хотя предэкспоненциальный множитель в нем мал по сравнению с коэффициентом в члене первого приближения, но величина отрицательного показателя экспоненты оказывается в два раза меньшей.

3. То же в поле $U = \frac{\alpha}{r} e^{-r/a}$.

Решение. Вычисление интеграла в (126,12) дает

$$d\sigma = 4a^2 \left(\frac{\alpha m a}{\hbar^2}\right)^2 \frac{do}{(q^2a^2+1)^2}.$$

Полное сечение

$$\sigma = 16\pi a^2 \left(\frac{\alpha m a}{\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{4k^2a^2+1}.$$

Условие применимости этих формул получается из (126,1)—(126,2) с α/a в качестве U: $\alpha m a/\hbar^2 \ll 1$ или $\alpha/\hbar v \ll 1$.

4. Определить фазы δ_l для рассеяния в центрально-симметричном поле в случае, соответствующем борновскому приближению.

Решение. Для радиальной волновой функции $\chi = rR$ движения в поле $U(r)$ и для функции $\chi^{(0)}$ свободного движения имеем уравнения (см. (32,10))

$$\chi'' + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U\right]\chi = 0,$$

$$\chi^{(0)''} + \left[k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]\chi^{(0)} = 0.$$

Умножив первое уравнение на $\chi^{(0)}$, второе — на χ, вычтя почленно одно из другого и проинтегрировав затем по dr (с учетом граничного условия $\chi = 0$ при $r = 0$), получим

$$\chi'(r)\chi^{(0)}(r) - \chi(r)\chi^{(0)'}(r) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_0^r U\chi\chi^{(0)}\,dr.$$

Рассматривая U как возмущение, можем положить в правой стороне равенства $\chi \approx \chi^{(0)}$. При $r \to \infty$ в левой стороне равенства пользуемся асимптотическими выражениями (33,12), (33,20), в интеграл же подставляем точное выражение (33,10). В результате получим

$$\sin\delta_l \approx \delta_l = -\frac{\pi m}{\hbar^2}\int_0^\infty U(r)\,[J_{l+1/2}(kr)]^2\,r\,dr.$$

Эту формулу можно было бы получить также и путем прямого разложения борновской амплитуды рассеяния (126,4) по полиномам Лежандра в соответствии с (123,11) (при малых δ_l).

5. Определить в борновском приближении полное сечение рассеяния в поле $U = \alpha/(r^2+a^2)^{n/2}$ с $n > 2$ для быстрых частиц ($ka \gg 1$).

Решение. Как будет видно, в данном случае в рассеянии основную роль играют парциальные амплитуды с большими моментами l. Поэтому сечение можно вычислять по формуле (123,11) с заменой в ней суммирования по l интегрированием; в борновском приближении все $\delta_l \ll 1$, так что

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2}\int_0^\infty 2l\delta_l^2\,dl. \qquad (1)$$

Фазы δ_l с большими l вычисляются по (124,1)

$$\delta_l = -\frac{\alpha m}{\hbar^2}\int\limits_{l/k}^{\infty}\frac{dr}{(r^2+a^2)^{n/2}(k^2-l^2/r^2)^{1/2}}.$$

Подстановкой $r^2+a^2=(a^2+l^2/k^2)/\xi$ интеграл приводится к известному интегралу Эйлера и дает

$$\delta_l = -\frac{m\alpha k^{n-2}}{2\hbar^2(a^2k^2+l^2)^{(n-1)/2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)}. \qquad (2)$$

Интеграл (1) определяется областью $l \sim ak \gg 1$, чем оправдывается сделанное предположение. Вычисление интеграла приводит к результату:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{n-2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)}\right]^2\left(\frac{m\alpha}{k\hbar^2a^{n-2}}\right)^2. \qquad (3)$$

Согласно (126,2) условие применимости борновского приближения в данном случае дается неравенством $m\alpha/\hbar^2ka^{n-1} \ll 1$. Обратим внимание на зависимость $\sigma \sim k^{-2}$, соответствующую сделанным в тексте общим утверждениям.

6. Найти в борновском приближении амплитуду рассеяния в двумерном случае (поле $U = U(x, z)$; поток частиц падает в направлении оси z).

Решение. Использовав примечание на стр. 198 и известное асимптотическое выражение функции Ганкеля

$$H_0^{(1)}(u) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi u}}\, e^{i(u-\pi/4)} \quad \text{при} \quad u \to \infty, \qquad (4)$$

найдем для поправки к волновой функции на больших расстояниях ρ_0 от оси поля (ось y) выражение

$$\psi^{(1)} \approx \frac{f(\varphi)}{\sqrt{-i\rho_0}}\, e^{ik\rho_0},$$

где амплитуда рассеяния

$$f(\varphi) = -\frac{m}{\hbar^2\sqrt{2\pi k}}\int U(\rho)\, e^{-i\mathbf{q}\rho}\, d^2\rho$$

($\rho = (x, z)$ — двумерный радиус-вектор; $d^2\rho = dx\,dz$; φ — угол рассеяния в плоскости xz). В двумерном случае амплитуда рассеяния имеет размерность корня из длины, а сечение рассеяния $d\sigma = |f|^2 d\varphi$ — размерность длины.

§ 127. Квазиклассический случай

Проследим, каким образом происходит предельный переход от квантовомеханической теории рассеяния к классической.

Исключив из рассмотрения равный нулю угол рассеяния θ, мы можем написать амплитуду рассеяния, даваемую точной теорией, в виде (124,4)

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(\cos\theta)\, e^{2i\delta_l}. \qquad (127,1)$$